第八章：酉空间

目录

目录

复线性空间上的内积

定义 (内积)

设 (α,β) 是复线性空间 V 上的二元复值函数, 若满足:

(1). **Hermite 对称性**: $(\beta,\alpha)=\overline{(\alpha,\beta)}$.

(2). **恒正性**: 对任意非零向量 α, $(\alpha,\alpha)>0$.

(3). **共轭双线性性**:

$$(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2,\beta)=\lambda_1(\alpha_1,\beta)+\lambda_2(\alpha_2,\beta),$$

$$(\alpha,\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2)=\overline{\mu_1}(\alpha,\beta_1)+\overline{\mu_2}(\alpha,\beta_2).$$

则称 (α,β) 为 V 上的一个**内积**.

内积的性质

性质1.

$(\alpha, \mathbf{0}) = 0 = (\mathbf{0}, \beta)$.

性质2. (共轭双线性性)

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j \beta_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \overline{\mu_j} (\alpha_i, \beta_j).$$

性质3. (Cauchy-Schwarz 不等式)

对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$|(\alpha, \beta)|^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta).$$

并且等号当且仅当向量 α, β 线性相关时成立.

定义 (Gram方阵)

设 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组基, 定义

$$G=\Big((\alpha_i,\alpha_j)\Big)_{n\times n}=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix},$$

则 n 阶方阵 G 称为内积在基 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 下的 **Gram 方阵**.

内积的矩阵表示

若 $\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i, \beta=\sum_{i=1}^n y_i\alpha_i$, 记 $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{C}^n$, 则

$$(\alpha,\beta)=\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^n y_j\alpha_j\right)=\sum_{i,j=1}^n x_i(\alpha_i,\alpha_j)\overline{y_j}=xGy^*,$$

其中 $y^*=\bar{y}^T$ 是 y 的共轭转置.

定理1. Gram方阵的性质

Gram方阵 G 是 Hermite 正定方阵.

证明

- **Hermite 性**: $G^* = G$ 由内积的 Hermite 对称性得到.
- **正定性**: 对任意非零 $x \in \mathbb{C}^n$, 由内积的恒正性:

$$xGx^* = (\alpha, \alpha) > 0,$$

其中 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i \neq 0$.

注记.

- 反之, 任意 Hermite 正定方阵 G 也可定义一个内积.
- n 维复线性空间 V 中取定基 $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, V 上的内积和它在基 Γ 下的Gram方阵对应, 这是 V 上所有内积的集合到所有 n 阶正定 Hermite 方阵集合上的一一对应.

不同基下的Gram方阵之间的关系

设内积 (α,β) 在 V 的基 $\Gamma=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 与 $\Lambda=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的Gram阵分别为 G_1 与 G_2, 过渡方阵为 $P=(p_{ij})$, 即 $(\beta_1\ \cdots\ \beta_n)=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)P$. 因此

$$\beta_i=\sum_{k=1}^n p_{ki}\alpha_k.$$

从而有

$$(\beta_i,\beta_j)=\left(\sum_{k=1}^n p_{ki}\alpha_k,\sum_{l=1}^n p_{lj}\alpha_l\right)=\sum_{k,l=1}^n p_{ki}(\alpha_k,\alpha_l)\overline{p_{lj}},$$

也就是

$$G_2=P^TG_1\overline{P}=P^TG_1(P^T)^*.$$

定义 (复相合)

设 A 与 B 是 n 阶复方阵, 如果存在 n 阶可逆复方阵 P, 使得

$$B=PAP^*,$$

则方阵 A 与 B 称为**复相合**的.

定义 (酉空间)

复线性空间 V 连同其上一个内积 $(\cdot\,,\,\cdot)$ 称为一个**酉空间**.

向量范数与正交性

- **范数**: $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$, 单位向量: $\|\alpha\| = 1$.
- **正交**: 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 记作 $\alpha \perp \beta$.

定理1.

酉空间中任意一组两两正交的非零向量线性无关.

定理2. Gram-Schmidt正交化

设 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 n 维酉空间 V 的基, 则存在两两正交的非零向量 $\beta_1, \ldots,$ β_n, 使得对每个 k, $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ 是子空间 $\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_k\rangle$ 的基.

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_k = \alpha_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} \beta_j, \quad k = 2, \ldots, n$$

定义 (标准正交基)

n 维酉空间 V 中由 n 个两两正交的单位向量组成的基称为**标准正交基**.

定理3.

n 维酉空间存在标准正交基.

定理4.

n 维酉空间中任意一组两两正交的单位向量组可扩充为标准正交基.

定理5-6.

- n 维酉空间两组标准正交基的过渡阵 U 为酉方阵, 即 $UU^* = U^*U = I_n$.
- 设 n 维酉空间两组基过渡阵 U 为酉方阵, 若其中一组基为标准正交基, 则另外一组基也为标准正交基.
- n 维酉空间 V 取定一组标准正交基, 则 V 的所有标准正交基的集合与 n 阶酉群 $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ (所有 n 阶酉方阵全体)一一对应.

酉方阵的性质

(1). 酉方阵 U 可逆且 $U^{-1} = U^*$.

(2). 酉方阵的逆仍是酉方阵.

(3). 两个酉方阵的乘积仍是酉方阵.

(4). 单位方阵 I_n 是酉方阵.

定理7. QR分解

任意可逆复方阵 A 可唯一分解为 $A = UT$, 其中 U 是酉方阵, T 是对角元全正的上三角方阵, 并且表示法唯一.

例1. $\mathbb{C}^n$ 标准内积

设 $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)^T, \beta = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{C}^n$, 定义

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \overline{\beta} = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n},$$

称为 $\mathbb{C}^n$ 的**标准内积**, 则 $\mathbb{C}^n$ 成为一个酉空间.

定理8.

n 阶复方阵为酉方阵当且仅当 n 个行 (**或列**)构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基.

定义 (正交补)

设 W 是酉空间 V 的子空间, 定义 W 的**正交补**为:

$$W^{\perp}=\{\beta\in V\mid(\alpha,\beta)=0,\ \forall\alpha\in W\}.$$

定理9.

有直和分解: $V=W\oplus W^{\perp}$.

定义 (酉空间的同构)

两个酉空间 V,W 之间的双射 σ 若满足 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$, 则称 σ 为**酉空间的同构映射**, 而酉空间 V 与 W 称为**同构**.

定理10.

任意 n 维酉空间均同构于 $\mathbb{C}^n$, 从而两个有限维酉空间同构当且仅当维数相同.

目录

复内积诱导的自然映射

设 V 是酉空间, 定义 $\sigma(\beta)=f_\beta$, 其中

$$f_\beta(\alpha)=(\alpha,\beta),$$

则 f_β 为 V 上的复线性函数.

定理1.

设 V 为 n 维酉空间, 则 $\sigma: V\to V^*$ 是复线性空间的同构映射.

定义 (伴随变换)

对酉空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$, 定义其**伴随变换** $\mathscr{A}^*$ 为满足如下关系的映射:

$$(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*(\beta)),\quad \forall\alpha,\beta\in V.$$

则 $\mathscr{A}^*$ 也是 V 上线性变换.

伴随变换的性质

(1). $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$.

(2). $(\lambda\mathscr{A})^* = \overline{\lambda}\mathscr{A}^*$.

(3). $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

(4). $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$.

(5). 若 $\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵为 A, 则 $\mathscr{A}^*$ 的矩阵为 A^*.

(6). W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间当且仅当 $W^\perp$ 是 $\mathscr{A}^*$ 的不变子空间.

定义 (酉相似)

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若存在酉方阵 U 使得 $B = U^*AU$, 则称 A 与 B **酉相似**.

注记.

- **几何意义**: 酉空间中同一线性变换在不同标准正交基下的方阵酉相似, 并且酉相似的方阵是同一线性变换在不同标准正交基下的方阵.
- 酉相似是等价关系, 将 $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n\times n}$ 划分为酉相似等价类.

定理2. 酉相似下的标准形

任意 n 阶复方阵 A 酉相似于一个上三角方阵, 其对角线为 A 的特征值.

定义 (规范方阵)

若 $A^*A = AA^*$, 则称 A 为**规范方阵**.

注记.

酉方阵、Hermite方阵、斜Hermite方阵都是规范方阵.

定理3. 规范方阵的酉相似标准形 (Schur定理)

A 酉相似于对角方阵 $\iff$ A 是规范方阵.

定理4. Schur不等式

设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的特征值, 则

$$\mathrm{tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

等号成立当且仅当 A 是规范方阵.

特殊规范方阵的酉对角化

定理5. 规范方阵的酉相似标准形

规范方阵 A 酉相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

定理6. 酉方阵的酉相似标准形

酉方阵 U 酉相似于 $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$.

定理7. Hermite方阵的酉相似标准形

Hermite方阵 H 酉相似于实对角方阵.

定理8. 斜Hermite方阵的酉相似标准形

斜Hermite方阵 K 酉相似于 $\mathrm{diag}(i\lambda_1, \ldots, i\lambda_r, 0, \ldots, 0)$.

注记.

"规范方阵"特征值是"规范方阵"在酉相似下的**全系不变量**.

几何对应

定理9.

设 $\mathscr{A}$ 是 n 维酉空间 V 上的线性变换, 则存在 V 的标准正交基 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, 使得线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵是上三角阵, 其对角线为 $\mathscr{A}$ 的全部特征值.

定义

酉空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$:

- 若 $\mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$, 称为**规范变换**.
- 若 $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^{-1}$, 称为**酉变换**.
- 若 $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$, 称为**自伴变换**.
- 若 $\mathscr{A}^* = -\mathscr{A}$, 称为**斜自伴变换**.
- **对应矩阵**: 规范方阵、酉方阵、Hermite方阵、斜Hermite方阵.

定理10. 酉变换

$\mathscr{A}$ 是酉变换 $\iff \|\mathscr{A}(\alpha)\| = \|\alpha\|, \forall \alpha \in V$.

证明.

若 $\mathscr{A}$ 是酉变换, 则 $\mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{E}$. 从而有

$$(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\alpha)) = (\alpha, \mathscr{A}^*((\mathscr{A}(\alpha)) = (\alpha, \alpha), \quad \forall \alpha \in V.$$

反之, 若 $\|\mathscr{A}(\alpha)\| = \|\alpha\|, \forall \alpha \in V$. 则对任意 $\alpha, \beta \in V$ 由于

$$(\mathscr{A}(\alpha+\beta), \mathscr{A}(\alpha+\beta)) = (\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\alpha)) + (\mathscr{A}(\beta), \mathscr{A}(\alpha)) + (\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)) + (\mathscr{A}(\beta), \mathscr{A}(\beta)),$$

$$(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha, \alpha) + (\beta, \alpha) + (\alpha, \beta) + (\beta, \beta),$$

$$(\mathscr{A}(\alpha+i\beta), \mathscr{A}(\alpha+i\beta)) = (\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\alpha)) + i(\mathscr{A}(\beta), \mathscr{A}(\alpha)) - i(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)) + (\mathscr{A}(\beta), \mathscr{A}(\beta)),$$

$$(\alpha+i\beta, \alpha+i\beta) = (\alpha, \alpha) + i(\beta, \alpha) - i(\alpha, \beta) + (\beta, \beta),$$

从而有

$$(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)) = (\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V.$$

立即可得 $\mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{E}$. □

定义 (酉群)

n 维酉空间 V 上所有酉变换构成群 $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, 称为**酉变换群**, 或简称**酉群**.

定理11. 规范变换

$\mathscr{A}$ 为规范变换 $\iff$ 存在 V 的标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在基下方阵为对角阵.

例1.

n 阶复方阵 A 为规范方阵当且仅当存在多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 使得 $A^* = f(A)$.

必要性: 设 $A = U^*DU$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \lambda_t I_{n_t})$, 构造 Lagrange 插值多项式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{t} \overline{\lambda_i} \cdot \frac{\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)},$$

则有 $f(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$. 立即有 $f(A) = U^* f(D) U = U^* \overline{D} U = A^*$.

例2. 酉方阵的平方根

设 n 阶复方阵 A 与酉方阵 U 满足 $UA = AU^T$, 则存在酉方阵 V 使得 $U = V^2$, 且 $VA = AV^T$.

证明.

存在酉方阵 U_1 使得 $U = U_1^* \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})U_1$, 令

$$V = U_1^* \operatorname{diag}\left(e^{i\frac{\theta_1}{2}}, \ldots, e^{i\frac{\theta_n}{2}}\right) U_1,$$

则 $V^2 = U$. 设 $U_1AU_1^T = (a_{kl})$, 由于 $UA = AU^T$, 即

$$U_1^* \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})U_1A = AU_1^T \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})\overline{U_1},$$

也就是

$$\operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})U_1AU_1^T = U_1AU_1^T \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}).$$

从而有 $e^{i\theta_k}a_{kl} = e^{i\theta_l}a_{kl} \Longrightarrow e^{i\frac{\theta_k}{2}}a_{kl} = e^{i\frac{\theta_l}{2}}a_{kl} \Longrightarrow VA = AV^T$. □

目录

定义

Hermite 方阵 H 称为:

- **正定** (记为 $H>0$): $x^*Hx>0,\ \forall x\neq 0$.
- **半正定** (记为 $H\geq 0$): $x^*Hx\geq 0$.
- **负定/半负定**类似.

定理1. 正定 Hermite 方阵的等价条件

设 H 是 n 阶 Hermite 阵, 则以下等价:

(1). $H>0$ ($x^*Hx>0,\ \forall x\neq 0$).

(2). H 的特征值全为正数.

(3). 存在正定 Hermite 阵 H_1, 使 $H=H_1^2$.

(4). 存在 n 阶可逆方阵 P, 使 $H=P^*P$.

(5). H 的所有主子式为正.

(6). H 的顺序主子式为正.

(7). H 的所有 k 阶主子式之和为正 ($k=1,\ldots,n$).

定理2. 半正定 Hermite 方阵的等价条件

设 H 是 n 阶 Hermite 阵, 则以下等价:

(1). $H \geq 0$ ($x^*Hx \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n$).

(2). H 的特征值全非负.

(3). 存在半正定 Hermite 阵 H_1, 使 $H = H_1^2$.

(4). **存在矩阵** $P \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 使 $H = P^*P$.

(5). H 的所有主子式非负.

(6). H 的所有 k 阶主子式之和非负 $(k = 1, \ldots, n)$.

定理3. 半正定 Hermite 阵的平方根

若 H 为半正定 Hermite 阵, 则存在唯一半正定 Hermite 阵 H_1, 使得 $H = H_1^2$, 记为 $H^{1/2}$ 或 $\sqrt{H}$. 并且与方阵 H 可交换的 n 阶方阵 A 也和方阵 H_1 可交换.

定义 (酉相抵)

设 A 与 B 是 $m \times n$ 阶复矩阵, 如果存在 m 阶与 n 阶酉方阵 U_1 与 U_2, 使得 $B = U_1 A U_2$, 则矩阵 A 与 B 称为**酉相抵**的.

注记

- $m \times n$ 阶复矩阵之间的酉相抵关系显然满足自反性、对称性与传递性, 因此它是 $m \times n$ 阶复矩阵之间的**等价关系**.
- 关于 $m \times n$ 阶复矩阵集合 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 在酉相抵下分类的两个基本问题是:
  (1). 确定 $m \times n$ 阶复矩阵在酉相抵下的**标准形**;
  (2). 确定 $m \times n$ 阶复矩阵在酉相抵下的**全系不变量**.

定义 (奇异值)

设 A 是 $m \times n$ 阶复矩阵, 则 n 阶方阵 A^*A(或 m 阶方阵 AA^*) 的非零特征值的算术平方根称为矩阵 A 的**奇异值**.

定理4. 复矩阵的奇异值分解

设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\operatorname{rank} A = r$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \cdots \ge \mu_r > 0$ 为 A 的奇异值. 则存在 m 阶与 n 阶酉方阵 U_1 与 U_2, 使得

$$A = U_1 \begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} U_2,$$

其中 $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r)$. 并且奇异值是复矩阵在酉相抵下的**全系不变量**.

定理5. 复方阵的极分解

任意 n 阶复方阵 A 可分解为

$$A = H_1 U = U H_2,$$

其中 H_1, H_2 为半正定 Hermite 阵, U 为酉方阵, 并且 H_1, H_2 由 A 唯一确定.

定理6. Moore–Penrose广义逆的存在唯一性

任意 $m \times n$ 阶复矩阵 A 存在唯一的 **Moore–Penrose 广义逆** A^+, 也就是满足如下方程的 $n \times m$ 阶矩阵 X:

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (AX)^* = AX,\ (XA)^* = XA.$$

证明.

若 $A = U_1 \begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} U_2$, 设 $Y = U_2 X U_1 = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \implies Y_1 = D^{-1}.$$

$$\left(\begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \right)^* = \begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \implies Y_2 = \mathbf{O}.$$

$$\left(\begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbf{O} \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \right)^* = \begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbf{O} \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \implies Y_3 = \mathbf{O}.$$

$$\begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & Y_4 \end{pmatrix} \implies Y_4 = \mathbf{O}.$$

□

目录

例1. 正定 Hermite 阵的和

设 $H_1 > 0$, H_2 是 Hermite 阵, 则 $H_1 + H_2 > 0 \iff H_1^{-1}H_2$ 特征值都 > -1.

证明.

首先证明存在可逆方阵 P 使得

$$H_1 = P^*P,\ H_2 = P^* \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)P,$$

则

$$H_1 + H_2 = P^* \operatorname{diag}(1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_n)P.$$

由于

$$H_1^{-1}H_2 = P^{-1}(P^*)^{-1}P^* \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)P = P^{-1} \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)P.$$

从而有

$$H_1 + H_2 > 0 \iff \operatorname{diag}(1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_n) > 0 \iff \mu_i > -1. \qquad \square$$

例2. 樊畿(Ky Fan) 与 O. Taussky

设 H_1, H_2 是 n 阶 Hermite 阵, $H_1 > 0$, 且 H_1H_2 是 Hermite 阵, 则

$$H_1H_2 > 0 \iff H_2 > 0.$$

证明.

设可逆方阵 P 使得

$$H_1^{-1} = P^*P,\ H_2 = P^* \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)P,$$

则

$$H_1H_2 = P^{-1} \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)P.$$

再由正定 Hermite 阵的性质和正定的相合不变性即得. □

例3. Olga Taussky

设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H = A + iB > 0$, 则 $\det A \geq \det H$, 等号成立当且仅当 $B = 0$.

证明.

由 H 正定 Hermite, 立即有 A, B 分别为实对称和斜对称阵, 且 $A > 0$. 设可逆方阵 Q 使 $QAQ^T = I_n$, 则 QBQ^T 为实斜对称阵, 故存在实正交方阵 O 使得

$$OQBQ^TO^T = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & b_s \\ -b_s & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right) \triangleq M.$$

令 $P = (OQ)^{-1}$, 则 $A = Q^{-1}(Q^T)^{-1} = PP^T$, $B = PMP^T$. 从而有

$$H = A + iB = P \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & ib_1 \\ -ib_1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & ib_s \\ -ib_s & 1 \end{pmatrix}, I_{n-s}\right) P^T.$$

由于 $H > 0$, 因此 $1 - b_k^2 > 0$, 也就是 $-1 < b_k < 1$. 计算得

$$\det H = (\det P)^2 \prod_{k=1}^{s} (1 - b_k^2) \leq (\det P)^2 = \det A.$$

等号成立当且仅当 $b_k = 0$, $1 \leq k \leq s$, 也就是 $B = 0$. $\square$

例4. 华罗庚不等式

设 A, B 是 n 阶复方阵, 若 $I_n - A^*A > 0$, 且 $I_n - B^*B > 0$, 则

$$|\det(I_n - A^*B)|^2 \geq \det(I_n - A^*A) \cdot \det(I_n - B^*B).$$

证明.

因为

$$\begin{pmatrix} I_n & \mathbf{O} \\ -A^* & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A^* & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ \mathbf{O} & I_n - A^*B \end{pmatrix},$$

所以 $\det \begin{pmatrix} I_n & B \\ A^* & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n - A^*B)$. 同理有

$$\det \begin{pmatrix} I_n & -A \\ -B^* & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n - B^*A) = \overline{\det(I_n - A^*B)}.$$

从而

$$|\det(I_n - A^*B)|^2 = \begin{vmatrix} I_n & B \\ A^* & I_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_n & -A \\ -B^* & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n - BB^* & B - A \\ A^* - B^* & I_n - A^*A \end{vmatrix}.$$

证明(续1).

由于

$$\begin{pmatrix} I_n & -(B-A)(I_n-A^*A)^{-1} \\ \mathbf{O} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n-BB^* & B-A \\ A^*-B^* & I_n-A^*A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_n-BB^*-(B-A)(I_n-A^*A)^{-1}(A^*-B^*) & \mathbf{O} \\ A^*-B^* & I_n-A^*A \end{pmatrix}.$$

讨论可得 $I_n-BB^*>0$, $(A-B)(I_n-A^*A)^{-1}(A^*-B^*)\geq 0$. □

证明(续2).

分解方阵

$$\begin{pmatrix} I_n-BB^* & B-A \\ A^*-B^* & I_n-A^*A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n-BB^* & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_n-A^*A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{O} & B-A \\ A^*-B^* & \mathbf{O} \end{pmatrix} = X+Y.$$

由于 $\varphi_{I_n-BB^*}(\lambda)=\varphi_{I_n-B^*B}(\lambda)$, 立即有 $I_n-BB^*>0$. 从而有 $X>0$, Y 是斜 Hermite 阵, 再将 X,Y 同时相合对角化即可. □

例5. Hermite 阵的秩不等式

设 H 为 Hermite 阵, 秩为 r, 则
$$r \geq \frac{(\operatorname{tr} H)^2}{\operatorname{tr} H^2}.$$

证明.

因为 H 是 Hermite 的, 所以存在酉方阵 U 使得
$$UHU^* = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0),$$
其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ 是 H 全部非零特征值. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有
$$(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \cdots + \lambda_r \cdot 1)^2 \leq (\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_r^2)(1 + 1 + \cdots + 1) = r \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2.$$
另一方面, 我们有
$$\operatorname{tr}(H) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i, \quad \operatorname{tr}(H^2) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2.$$
□

例6. Mitchell

A 相似于对角阵 $\Longleftrightarrow$ 存在正定 Hermite 方阵 H 使得 HAH^{-1} 是规范方阵.

证明.

- **充分性**: 因为 HAH^{-1} 是规范方阵, 所以存在酉方阵 U 使得

$$UHAH^{-1}U^* = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

令 $P = UH$, 则 P 可逆, 并且

$$PAP^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

- **必要性**: 设 A 相似于对角阵, 即存在可逆方阵 P 使得

$$PAP^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

由方阵极分解, 存在正定 Hermite 方阵 H 与酉方阵 U, 使 $P = UH$. 因此

$$HAH^{-1} = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) U$$

为规范方阵. □

例7.

设 S 为复**对称**方阵, 奇异值为 $\mu_1, \ldots, \mu_r$, 则存在酉方阵 U 使得

$$USU^T = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0).$$

证明.

由奇异值分解, 存在 n 阶酉方阵 U_1, U_2, 使得

$$S = U_1 \,\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0) U_2.$$

因为 S 是对称的, 所以有

$$\overline{U_2} U_1 \,\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0)(\overline{U_2} U_1)^T.$$

由第2节例2, 存在 n 阶酉方阵 V, 使得 $\overline{U_2} U_1 = V^2$, 并且

$$V \,\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0) V^T.$$

令 $U = VU_1^*$, 则

$$USU^T = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0). \qquad \square$$