第7章：欧几里得空间

§7.1. 线性代数(B1)回顾

2025年12月

内积的定义与例子

定义

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 若有映射 $(\ ,\ ): V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, 满足

(1). $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;

(2). $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$;

(3). $(\lambda\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta)$;

(4). $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$, 且等号成立 $\Longleftrightarrow \alpha = 0$.

则称 (α, β) 为 α 与 β 的**内积**, 称 $(V, (,))$ 为**Euclid空间**, 简称 V 为**欧氏空间**.

注.

(1). **双线性性**:

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j \beta_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (\alpha_i, \beta_j).$$

(2). $(\alpha, 0) = (0, \alpha) = 0$. 但是 $(\alpha, \beta) = 0 \not\Longrightarrow \alpha = 0$ 或 $\beta = 0$.

长度、夹角与垂直

设 $(V, (\ ,\ ))$ 为**欧氏空间**.

(1). $\forall\, \alpha, \beta \in V$, 定义 α 的**长度(模, 范数)**为 $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$.

(2). 定义 α 与 β 的夹角为 $\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \dfrac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$.

(3). 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与 β **相互正交(垂直)**, 记为 $\alpha \perp \beta$.

注.

(1). 0 与 α 的夹角不定义.

(2). $|\alpha| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$.

(3). $|\alpha| = 1$ 称为 **单位向量**.

(4). $\forall\, 0 \neq \alpha \in V$, $\alpha \longmapsto \dfrac{\alpha}{|\alpha|}$, **“单位化”**.

$\mathbb{R}^n$标准内积

例1. 标准内积

(1). 取 $V=\mathbb{R}^n$, $\forall\,\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

称为**标准内积**.

(2). 此时 $|\alpha|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.

(3). $\langle\alpha,\,\beta\rangle=\arccos\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}$.

例2. $\mathbb{R}^2$新内积

取 $V=\mathbb{R}^2$. 定义 $(\ ,\ )\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right)\longmapsto x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+5x_2y_2.$$

则 $(\mathbb{R}^2,(\ ,\ ))$ 是欧氏空间.

例3. $\mathbb{R}^n$新内积

取 $V=\mathbb{R}^n$, 取定 n 阶可逆方阵 $A\in M_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义

$$(\ ,\ )\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$(\alpha,\beta)\longmapsto \alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\beta=(A\alpha)^{\mathrm{T}}(A\beta)$$

则 $(\mathbb{R}^n,(\ ,\ ))$ 是欧氏空间.

注.

当 $n=2$, 在例3中取 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, 则立即得到 $\mathbb{R}^2$ 上例2的内积.

例4. Frobenius 内积

(1). $V=\mathbb{R}^{m\times n}$, $A,B\in V$, 定义 $(A,B):=\operatorname{tr}(AB^{\mathrm{T}})$, 则 $(V,(\ ,\ ))$ 是欧氏空间.

(2). 对比上述内积和 $\mathbb{R}^{m\cdot n}$ 上的标准内积.

例5.

设 V 是区间 $[0,1]$ 上所有连续实函数构成的实线性空间, 定义

$$\begin{aligned}(\ ,\ )\colon V\times V &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (f(x),g(x)) &\longmapsto \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

则 $(V,(\ ,\ ))$ 是欧氏空间.

Gram 阵

定义

取定 n 维欧氏空间 V 和 V 中一组基 $\Gamma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, 记方阵 $G = (g_{ij})_{n\times n}$, 其中 $g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$. 称 G 为 (,) 在 Γ 下的**度量矩阵**, 也称为 **Gram 方阵**.

注.

(1). 对 n 维欧氏空间 V, 取定 V 中一组基 Γ, 则有集合上的双射:

$$V \text{ 上的内积} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{R} \text{ 上 } n \text{ 阶实对称正定矩阵.}$$

(2). 设 $\Lambda = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 是 V 的另一组基, $(\beta_1 \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)P$. 记 $\widetilde{G} = (\tilde{g}_{ij})_{n\times n}$ 为内积在基 Λ 下的度量矩阵. 则有 $\widetilde{G} = P^T G P$.

(3). 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 若存在 n 阶可逆实方阵 P 使得$B = P^T A P$, 则称 A 与 B **相合**.

内积的性质

定理1 (Cauchy–Schwarz不等式)

对任意 $\alpha, \beta \in V$:

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|.$$

等号成立当且仅当 α, β 线性相关.

三角不等式

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

勾股定理

$\alpha \perp \beta$ 当且仅当 $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$。

例6.

设 V 是欧氏空间, 则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ 线性无关 $\Longleftrightarrow G = \big((\alpha_i, \alpha_j)\big)_{n\times n}$ 可逆.

正交性与Gram-Schmidt 正交化

定理2.

若欧氏空间 V 中向量组 Γ: $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 满足 $\alpha_i \neq 0$, 且 $\alpha_i \perp \alpha_j$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant s$, 则向量组$\Gamma$ 线性无关.

Gram-Schmidt 正交化.

设 Γ: $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 为欧氏空间 V 的一组基. 取

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad \beta_{k+1} = \alpha_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(\alpha_{k+1},\, \beta_i)}{(\beta_i,\, \beta_i)}, \ (1 \leqslant k < n).$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{k+1}$ 两两正交, 且

$$\langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{k+1} \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1} \rangle.$$

注.

(1). V 的任一组基 $\Gamma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \xrightarrow{\text{正交化}}$ 正交基 $\Gamma' = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$. 再进行 $\xrightarrow{\text{单位化}}$ **标准正交基** $\Gamma'' = \left\{\eta_1 = \dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}, \cdots, \eta_n = \dfrac{\beta_n}{|\beta_n|}\right\}$.

(2). $(\eta_1\ \eta_2 \cdots \eta_n) = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)P$, P 是主对角元为正数的上三角阵.

(3). 任意度量阵 G 可分解为$G = P^T P$, 其中 P 是主对角元为正的上三角阵.

(4). n 维欧氏空间中, 任意一个正交向量组都可以扩充成一组正交基.

(5). n 维欧氏空间中, 任意一个单位正交向量组都可以扩充成一组标准正交基.

定理: 矩阵的 QR 分解

设 A 为 n 阶可逆实方阵, 则有矩阵的分解

$$A = QR,$$

其中 Q 为 n 阶正交方阵, R 为主对角元大于零的 n 阶上三角阵, 且分解唯一.

例7.

设 V 是 3 维欧氏空间, 内积 $(\ ,\ )$ 在 V 的基 Γ: α_1, α_2, α_3 下的度量矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 10 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

求 V 的一组标准正交基 (用 α_1, α_2, α_3 表示).

注.

度量矩阵对应关系为

$$G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 10 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & (\alpha_1,\alpha_3)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & (\alpha_2,\alpha_3)\\ (\alpha_3,\alpha_1) & (\alpha_3,\alpha_2) & (\alpha_3,\alpha_3)\end{pmatrix}.$$

解1.

(1). 将 α_1 单位化，得 $\eta_1 = \dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|} = \dfrac{\alpha_1}{1} = \alpha_1$.

(2). 令 $\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \eta_1)\eta_1 = \alpha_2 - (\alpha_2, \alpha_1)\alpha_1 = \alpha_2$, 再单位化得

$$\eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} = \frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_2.$$

(3). 令

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \alpha_3 - (\alpha_3, \eta_1)\eta_1 - (\alpha_3, \eta_2)\eta_2 \\
&= \alpha_3 - (\alpha_3, \alpha_1)\alpha_1 - (\alpha_3, \frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_2)\frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_2 \\
&= -\alpha_1 + \frac{1}{5}\alpha_2 + \alpha_3,
\end{aligned}$$

再单位化得 $\eta_3 = \dfrac{\beta_3}{|\beta_3|} = -\dfrac{\sqrt{15}}{3}\alpha_1 + \dfrac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2 + \dfrac{\sqrt{15}}{3}\alpha_3$.

(4). $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ 为 V 的一组标准正交基.

解2.

(1). 先正交化 $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\,\beta_1)}{(\beta_1,\,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\,\alpha_1)}{(\alpha_1,\,\alpha_1)}\alpha_1=\alpha_2$.

$$\begin{aligned}\beta_3&=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\,\beta_1)}{(\beta_1,\,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\,\beta_2)}{(\beta_2,\,\beta_2)}\beta_2=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\,\alpha_1)}{(\alpha_1,\,\alpha_1)}\alpha_1-\frac{(\alpha_3,\,\alpha_2)}{(\alpha_2,\,\alpha_2)}\alpha_2\\&=-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2+\alpha_3.\end{aligned}$$

(2). 再单位化

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\alpha_1,\quad \eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_2,$$

$$\eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=-\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_1+\frac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2+\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_3.$$

(3). $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ 为 V 的一组标准正交基.

例8.

设 $\alpha_1=(1,1,1,2)^T$, $\alpha_2=(1,2,3,-3)^T$ 为 $\mathbb{R}^4$ 中一个正交向量组. 求 $\mathbb{R}^4$ 中向量 α_3, α_4, 使得 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 成为 $\mathbb{R}^4$ 中的一组正交基.

解1.

验算知 $\{\alpha_1,\alpha_2,e_1,e_2\}$ 为 $\mathbb{R}^4$ 一组基. 再将该组基做 Gram-Schmidt 正交化即可.

解2.

α_3 满足$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0\\ \alpha_2^T\alpha_3=0\end{cases}$, α_4 满足$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_4=0\\ \alpha_2^T\alpha_4=0\\ \alpha_3^T\alpha_4=0\end{cases}$.

解3.

记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\end{pmatrix}$, 解线性方程组 $Ax=0$, 得基础解系 γ_3, γ_4, 并 Gram-Schmidt 正交化得 $\alpha_3(=\gamma_3)$, α_4. 则 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是所求正交基.

正交方阵

定义

设 $O \in M_n(\mathbb{R})$. 若 O 满足 $O^{\mathrm{T}}O = I_n$, 则称 O 为**正交矩阵**.

注.

(1). 已知 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 V 的标准正交基, $(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)O$. 则$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ 也是 V 的标准正交基 $\Longleftrightarrow$ O 是正交矩阵.

(2). $\forall\, O \in M_n(\mathbb{R})$, 设 $O = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. 则 O 为正交矩阵 $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \text{ 为 } \mathbb{R}^n \text{ 的一组标准正交基.} \\ \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \text{ 为 } \mathbb{R}^n \text{ 的一组标准正交基.} \end{cases}$$

(3). I_n 为正交矩阵; A, B 为 n 阶正交矩阵 $\Longrightarrow$ AB 也为 n 阶正交矩阵; A 为正交矩阵 $\Longrightarrow$ A 可逆, 且 A^{-1} 也为正交矩阵.

例9.

设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基, β_1,β_2,β_3 为 V 中向量组, 若

$$\begin{array}{lll}(\alpha_1,\,\beta_1)=2, & (\alpha_1,\,\beta_2)=-1, & (\alpha_1,\,\beta_3)=-3\\ (\alpha_2,\,\beta_1)=0, & (\alpha_2,\,\beta_2)=1, & (\alpha_2,\,\beta_3)=2,\\ (\alpha_3,\,\beta_1)=1, & (\alpha_3,\,\beta_2)=2, & (\alpha_3,\,\beta_3)=1.\end{array}$$

则 $\beta_1,\,\beta_2,\,\beta_3$ 是否线性相关?

注.

(1).

$$G=((\alpha_i,\beta_j))=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}.$$

(2). 事实上, 我们有

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_3,\quad \beta_2=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\quad \beta_3=-3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3.$$

正交投影

(1). 设 V 是 n 维欧氏空间, W 是 V 的子空间, 则任意 $\xi \in V$ 有唯一分解 $\xi = \hat{\xi} + \beta$, 满足 $\hat{\xi} \in W$, $\beta \perp W$, 称 $\mathscr{P}_W(\xi) \triangleq \hat{\xi}$ 为 ξ 在 W 上的**正交投影**, 并且 $\mathscr{P}_W \in L(V, W)$.

(2). $\hat{\xi}$ 为 W 中最接近 ξ 的点, 即有

$$|\xi - \hat{\xi}| < |\xi - w|, \quad (\forall\, w \in W,\, w \neq \hat{\xi})$$

称 $\hat{\xi}$ 为 W 中向量对 ξ 的**最佳逼近**.

(3). 若 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 为 W 的标准正交基, 则有

$$\mathscr{P}_W(\xi) = \sum_{i=1}^{r} (\xi, \alpha_i)\alpha_i.$$

(3). 应用：**最小二乘法**.

注.

$$\xi = \hat{\xi} + \beta \in W \oplus W^{\perp}.$$

例9.

对于任意 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_4[x]$, 定义

$$(f(x),\ g(x)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(1). 证明: (,) 为 $\mathbb{R}_4[x]$ 的内积.

(2). 将 $\mathbb{R}_4[x]$ 中的基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 进行 Gram-Schmidt 标准正交化.

(3). 设 W 为 $\mathbb{R}_4[x]$ 中由 x 和 x^2 生成的线性子空间. 令 $h(x) = 1 + x^3$. 求 $k(x) \in W$, 使得长度 $|h(x) - k(x)|$ 最小.

子空间的正交补

(1). 设 V 是欧氏空间, 则 W 是 V 的线性子空间 $\Longleftrightarrow$ W 是 V 的**欧氏子空间**.

(2). 若 $\forall\,\alpha \in S_1,\ \beta \in S_2$, 恒有 $(\alpha,\,\beta) = 0$, 则称 S_1 **与** S_2 **正交**, 记为 $S_1 \perp S_2$.
特别地, 若 $S_2 = \{\beta\}$, 则有 $S_1 \perp S_2 \Longleftrightarrow S_1 \perp \beta$.

(3). 记 $S_1^{\perp} = \{\beta \in V \mid S_1 \perp \beta\} = \{\beta \in V \mid (\alpha,\,\beta) = 0, \forall\,\alpha \in S_1\}$, 则 $S_1^{\perp}$ 是 V 的**欧氏子空间**.

注.

(1). W 是 V 的子空间 $\Longrightarrow$ $W^{\perp}$ 也是 V 的子空间. 进一步, $S_1^{\perp} = \langle S_1 \rangle^{\perp}$.

(2). 设 $W = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_s \rangle$, 则 $v \in W^{\perp} \Longleftrightarrow v \perp \alpha_i$, $(1 \leqslant i \leqslant s)$.

(3). W 是 V 的子空间, 则

$$V = W \oplus W^{\perp},$$

$W^{\perp}$ 称为 W 在 V 中的**正交补空间**.

(4). W 的补空间存在, 但不一定唯一; 而 W 的正交补空间存在, 且**唯一**.

例11.

$\forall\, A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 定义 $(A, B) := \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{T}})$, 则 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 是欧氏空间. 进一步有

(1). 基本矩阵 E_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ 构成 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 的一组标准正交基.

(2). 当 $m = n$, 令 $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^{\mathrm{T}} = A\}$, 则 W 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的正交补空间为 $W^{\perp} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^{\mathrm{T}} = -A\}$.

例12.

考虑 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$. 则

(1). $C(A^{\mathrm{T}}) = \langle \xi_1^T, \xi_2^T, \cdots, \xi_m^T \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$.

(2). $C(A^{\mathrm{T}})^{\perp}$ 是 $AX = 0$ 的解空间, 也就是 $C(A^{\mathrm{T}})^{\perp} = V_A$.

(3). $C(A) = \langle \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$.

(4). $C(A)^{\perp}$ 是 $A^{\mathrm{T}}X = 0$ 的解空间, 也就是 $C(A)^{\perp} = V_{A^{\mathrm{T}}}$.

欧氏空间的同构

定义

欧氏空间 $(V_1, (\ ,\ )_1)$ 与 $(V_2, (\ ,\ )_2)$ 称为**同构的** $\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ 存在**双射** $\varphi\colon V_1 \to V_2$, 满足

(1). $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$;

(2). $\varphi(\lambda\alpha) = \lambda\varphi(\alpha)$;

(3). $(\varphi(\alpha),\ \varphi(\beta))_2 = (\alpha,\ \beta)_1$.

注.

(1). 设 $\varphi\colon V_1 \longrightarrow V_2$ 为**线性空间**的同构映射, 任取 V_1 的基 Γ, 则 $\varphi(\Gamma)$ 是 V_2 的一组基.

(2). 记 G_1 为 $(\ ,\ )_1$ 在 Γ 下度量矩阵, G_2 为 $(\ ,\ )_2$ 在 $\varphi(\Gamma)$ 下度量矩阵. 则 $G_1 = G_2 \Longleftrightarrow (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))_2 = (\alpha, \beta)_1, \forall\, \alpha, \beta \in V_1$.

(3). 事实上有: $\varphi \in L(V_1, V_2)$ 为**欧氏空间**的同构映射 $\Longleftrightarrow G_1 = G_2$.

例13.

(1). 设 V 是 n 维欧氏空间, 任取 V 的一组标准正交基 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$. 记欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 自然的标准正交基为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 其中 $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\begin{aligned} \varphi\colon V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \alpha = \sum_{i=1}^n a_i\eta_i &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i, \end{aligned}$$

则 φ 是欧氏空间的同构映射.

(2). 另一方面, 设 V 是 n 维实线性空间, $\psi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ 是线性空间同构, 则 $\{\eta_1 = \psi(e_1), \cdots, \eta_n = \psi(e_n)\}$ 为 V 的一组基. 对于

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i\eta_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^n b_i\eta_i \in V,$$

定义 $(\alpha, \beta) \triangleq \sum\limits_{i=1}^n a_i b_i$, 则 $(V, (\ ,\ ))$ 是欧氏空间, 且 ψ 是欧氏空间同构.

正交变换

设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathscr{A} \in L(V)$, 则

$$\mathscr{A}\text{为}\textbf{正交变换} \overset{\text{定义}}{\iff} (\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)) = (\alpha, \beta), \forall\, \alpha,\ \beta \in V.$$

$$\iff |\mathscr{A}(\alpha)| = |\alpha|, \forall\, \alpha \in V.$$

$$\iff \mathscr{A}\text{把标准正交基映为标准正交基}.$$

$$\iff \mathscr{A}\text{在 } V \text{ 的任意标准正交基下对应的矩阵为正交矩阵}.$$

$$\iff \mathscr{A}\text{在 } V \text{ 的某组标准正交基下对应的矩阵为正交矩阵}.$$

注.

$\mathscr{A}$ 是 $(V, (\ ,\ ))$ 中的正交变换 $\Longrightarrow$ $\mathscr{A}$ 保持向量间的夹角. **反之未必!**

正交阵的性质

(1). A 为正交矩阵 $\Longrightarrow$ A 在 $\mathbb{C}$ 上的 n 个特征值都满足 $|\lambda| = 1$.

(2). 设正交矩阵 A 在 $\mathbb{C}$ 上的全部特征值为

$$\cos\theta_k \pm \sqrt{-1}\sin\theta_k,\ (1 \leqslant k \leqslant s), \quad 1,\ (t\ \text{重}), \quad -1,\ (n-2s-t\ \text{重}),$$

则 A 正交相似于

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_s & & \\ & & & I_t & \\ & & & & -I_{n-2s-t} \end{pmatrix}$$

其中

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}.$$

第一类、第二类正交变换

$\mathscr{A}$ 为正交变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵 A 为正交矩阵.

(1). $\mathscr{A}$ 为**第一类正交变换** $\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ $|A| = 1$.

(2). $\mathscr{A}$ 为**第二类正交变换** $\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ $|A| = -1$.

正交相似

对于 n 阶实方阵 A 和 B, 若存在 n 正交方阵 O 使得 $B = OAO^T$, 则称 A 和 B **正交相似**.

注.

由于 2 阶正交矩阵的正交相似标准形为 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 因此 $\mathbb{R}^2$ 中的第一类正交变换只有旋转; 第二类正交变换只有反射.

例14.

(1). 若 A 为 3 阶正交矩阵, 且 $|A| = 1$, 则 A 的正交相似标准形可能为:

$$I_3 \ \ (\theta = 0), \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \ (\theta = \pi), \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

它们都是旋转变换.

(2). 若 A 为 3 阶正交矩阵, 且 $|A| = -1$, 则 A 的正交相似标准形可能为:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

镜面反射

- n 维线性空间 V 中任意一个 $n-1$ 维的子空间称为一个**超平面**.
- 取定 $0 \neq \alpha \in V$, 定义

$$\begin{aligned} S_\alpha : V &\longrightarrow V \\ \beta &\longmapsto \beta - \frac{2(\beta,\,\alpha)}{(\alpha,\,\alpha)}\alpha, \end{aligned}$$

  称 S_α 是关于超平面 $\langle\alpha\rangle^\perp$ 的**镜面反射**.
- 对任意 $\beta, \gamma \in V$, 有

$$\Big(S_\alpha(\beta), S_\alpha(\gamma)\Big) = (\beta, \gamma).$$

镜面反射 S_α 的性质

(1). S_α 是第二类正交变换.

(2). 设 $\mathscr{A}$ 为 V 上正交变换, 且 $\dim V_{\mathscr{A}}(1) = n-1$, 则 $\mathscr{A}$ 为镜面反射.

(3). 设 $\mathscr{A} \in L(V)$, 则 $\mathscr{A}$ 是镜面反射 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 在 V 的任意一个标准正交基下的矩阵形如 $I_n - 2\delta\delta^{\mathrm{T}}$, 其中 δ 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位向量.

(4). 设 $\beta \neq \gamma$ 是 V 中向量, 且 $|\beta| = |\gamma|$, 则存在镜面反射 S_α, 使得 $S_\alpha(\beta) = \gamma$.

(5). 任意正交变换都可以分解成若干个镜面反射的复合.

注.

$$\begin{aligned} S_{\beta-\gamma}(\beta) &= \beta - \frac{2(\beta, \beta-\gamma)}{(\beta-\gamma, \beta-\gamma)}(\beta-\gamma) \\ &= \beta - \frac{2(\beta, \beta-\gamma)}{2(\beta,\beta) - 2(\beta,\gamma)}(\beta-\gamma) \\ &= \beta - (\beta-\gamma) = \gamma. \end{aligned}$$

对称变换

设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathscr{A} \in L(V)$, 则

$$\mathscr{A}\text{为对称变换} \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} (\mathscr{A}(\alpha),\beta) = (\alpha,\mathscr{A}(\beta)), \forall\, \alpha,\, \beta \in V.$$

$$\Longleftrightarrow \mathscr{A}\text{在 } V \text{ 的任意标准正交基下对应的矩阵为对称矩阵.}$$

$$\Longleftrightarrow \mathscr{A}\text{在 } V \text{ 的某组标准正交基下对应的矩阵为对称矩阵.}$$

实对称方阵的性质

(1). A 为实对称方阵 $\Longrightarrow$ A 有 n 个实特征值.

(2). 设实对称方阵 A 的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 则 A 正交相似于对角阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

例15.

设 W 是 V的子空间, 则 V 在 W 上的正交投影 $\mathscr{P}_W \in L(V)$ 是对称变换.

事实上, 我们有

$$\big(\mathscr{P}_W(\alpha), \beta\big) = \big(\mathscr{P}_W(\alpha), \mathscr{P}_W(\beta)\big) = \big(\alpha, \mathscr{P}_W(\beta)\big).$$

例16.

镜面反射 $S_\alpha\colon V \longrightarrow V$ 既是第二类正交变换, 也是对称变换.

事实上, 由于正交变换 S_α 满足 $S_\alpha^2 = \mathcal{E}_V$, 我们有

$$\big(S_\alpha(\beta), \gamma\big) = \big(S_\alpha^2(\beta), S_\alpha(\gamma)\big) = \big(\beta, S_\alpha(\gamma)\big).$$

实对称方阵 A 相似对角化

具体步骤

首先求 A 的 n 个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

(1). 若 A 有 n 个不同的特征值, 求每个特征值分别对应的特征向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 两两正交. 令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$, 则 η_i 仍是 A 的属于 λ_i 的特征向量, 且为单位向量. 从而 $O = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 为正交方阵, 并且有

$$O^{-1}AO = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

(2). 若 A 有 t 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$, $(t < n)$. 则在每个特征子空间 V_{λ_i} 中取一组标准正交基 $\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{i,k_i}\}$. 令

$$O = (\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1,k_1}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2,k_2}, \cdots, \alpha_{t1}, \cdots, \alpha_{t,k_t}),$$

则 O 为正交矩阵, 并且有

$$O^{-1}AO = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{k_1}, \lambda_2 I_{k_2}, \cdots, \lambda_t I_{k_t}).$$

反对称变换

设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathscr{A} \in L(V)$, 则

$\mathscr{A}$为**反对称变换** $\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ $(\mathscr{A}(\alpha), \beta) = -(\alpha, \mathscr{A}(\beta)), \forall\, \alpha,\, \beta \in V.$

$\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$在 V 的任意标准正交基下对应的矩阵为反对称矩阵.

$\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$在 V 的某组标准正交基下对应的矩阵为反对称矩阵.

反对称实方阵的性质

(1). A 为反对称实方阵 $\Longrightarrow$ A 在 $\mathbb{C}$ 中的特征值为 0 或**纯虚数**.

(2). 反对称实方阵A全部特征值为$\pm b_1 i, \cdots, \pm b_s i, 0, \cdots, 0$, 则$A$正交相似于

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & & \\ -b_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & b_s & \\ & & & -b_s & 0 & \\ & & & & & \mathbf{O}_{n-2s} \end{pmatrix}.$$