第5章：线性变换

§5.1. 线性代数(B1)回顾

中国科学技术大学数学科学学院

2025年11月3日

数组空间的线性映射和线性变换

定义

考虑映射 $\varphi\colon \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$. 下列条件等价

(1). φ 保持线性运算: $\varphi(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1)+\lambda_2\varphi(\boldsymbol{\alpha}_2)$.

(2). $\exists\, A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 使得$\varphi=\varphi_A\colon \boldsymbol{\alpha}\longmapsto A\boldsymbol{\alpha}$, 此时$A=\big(\varphi(\mathbf{e}_1),\varphi(\mathbf{e}_2),\ldots,\varphi(\mathbf{e}_n)\big)$.

- 满足以上等价条件的 φ 称为 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的**线性映射**. 记 $L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$ 为 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的所有线性映射组成的集合.
- 当 $m=n$ 时, 称 φ_A 为 $\mathbb{F}^n$ 上的**线性变换**. 记 $L(\mathbb{F}^n)$ 为 $\mathbb{F}^n$ 上所有线性变换组成的集合.

注.

线性空间的**同态映射**和**同构映射**都是特殊的线性映射.

性质

设 $\mathscr{A} \in L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$, 则

(1). $\mathscr{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(2). $\mathscr{A}(-\boldsymbol{\alpha}) = -\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$.

(3). $\mathscr{A}$ 保持线性组合:

$$\mathscr{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s) = \lambda_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1) + \cdots + \lambda_s\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s).$$

(4). 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 在 $\mathbb{F}^n$ 中线性相关, 则$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \cdots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 在 $\mathbb{F}^m$ 中线性相关.

复合

设 $\mathscr{A} \in L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$, $\mathscr{B} \in L(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^l)$, 则 $\mathscr{B} \circ \mathscr{A} \in L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^l)$.

注.

(1). 线性映射的合成 $\Longleftrightarrow$ 矩阵的乘法.

(2). 一般地, $AB \neq BA$, 因此 $\mathscr{A} \circ \mathscr{B} \neq \mathscr{B} \circ \mathscr{A}$!

线性映射的像与核

线性映射的像

$\mathbb{F}^m$ 的子空间 $\operatorname{Im}\mathscr{A} := \{\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{F}^n\}$ 称为 $\mathscr{A}$ **的像**, 也记为 $\mathscr{A}(\mathbb{F}^n)$.

线性映射的核

$\mathbb{F}^n$ 的子空间 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{F}^n \mid \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}\}$ 称为 $\mathscr{A}$ **的核**, 也记为$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$.

性质

设 $\mathscr{A} \in L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$, 则

(1). $\mathscr{A}$ 是单射 $\iff \operatorname{Ker}\mathscr{A} = \mathbf{0}$. $\mathscr{A}$ 是满射 $\iff \operatorname{Im}\mathscr{A} = \mathbb{F}^m$.

(2). $\mathscr{A}$ 是同构 $\iff \operatorname{Ker}\mathscr{A} = \mathbf{0}$ 并且 $\operatorname{Im}\mathscr{A} = \mathbb{F}^m$.

秩与零度

设 $\mathscr{A} \in L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$, $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 称为 $\mathscr{A}$ **的秩**, $\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 称为 $\mathscr{A}$ **的零度**.

秩与零度的关系

设 $\mathscr{A}$ 对应左乘矩阵 $A=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)$, 则 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}=V_A$, $\operatorname{Im}\mathscr{A}=\langle\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n\rangle$, 从而$\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}+\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}=n=\dim\mathbb{F}^n$.

同态基本定理

存在线性空间同构 $\mathbb{F}^n/\operatorname{Ker}\mathscr{A}\cong\operatorname{Im}\mathscr{A}$.

$\mathbb{F}^{m\times n}$与$L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$

- 在$L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$上可以定义加法和$\mathbb{F}$数乘

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha}):=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}),\ \ (\lambda\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha}):=\lambda\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}).$$

  则$L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$成为$\mathbb{F}$上的线性空间.

- 上述对应给出了双射

$$\Phi\colon\mathbb{F}^{m\times n}\longleftrightarrow L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m).$$

  事实上, Φ是$\mathbb{F}$上线性空间的同构映射.

方阵的特征值与特征向量

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 若存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 以及非零向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{F}^n$, 使得$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, 则称 λ 为 A 的一个**特征值**, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 A 的属于特征值 λ 的**特征向量**.

特征子空间

$$V_A(\lambda) := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{F}^n \mid A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}\} = \{A \text{ 的属于 } \lambda \text{ 的特征向量}\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间, 称为 A 的属于特征值 λ 的**特征子空间**.

特征多项式

$\varphi_A(\lambda) := |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的 n 次首一多项式, 称为 A 的**特征多项式**.

求 A 的特征值与特征向量的步骤

step 1. 求出 $\varphi_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ 在 $\mathbb{F}$ 中全部不相同的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$.

step 2. 对每个 λ_i, 解线性方程组 $(\lambda_i I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得解空间的一组基

$\{\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{im_i}\}$, 其中$m_i = n - \operatorname{rank}(\lambda_i I_n - A)$.

step 3. 矩阵 A 的全部不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$.

step 4. 属于 λ_i 的**特征向量**的通式为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_{i1} + k_2\boldsymbol{\alpha}_{i2} + \cdots + k_{m_i}\boldsymbol{\alpha}_{im_i}, \ (k_1, k_2, \cdots, k_{m_i} \in \mathbb{F}, \text{不全为零}).$$

而 A 的属于特征值 λ_i 的**特征子空间**

$$V_A(\lambda_i) = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_{i1} + k_2\boldsymbol{\alpha}_{i2} + \cdots + k_{m_i}\boldsymbol{\alpha}_{im_i} \mid k_1, k_2, \cdots, k_{m_i} \in \mathbb{F}\}.$$

性质

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值 (有可能相同), 也就是

$$\varphi_A(\lambda) = |\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

则

(1). $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$;

(2). $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

特别地, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 的 n 个特征值都不为零.

注.

$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 可逆 $\Longleftrightarrow \varphi_A(0) \neq 0$, 也就是零不是特征值.

矩阵的相似

设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 若存在$\mathbb{F}$上的$n$阶可逆矩阵 P, 使得$B = P^{-1}AP$, 则称A 与 B **在数域$\mathbb{F}$上相似**, 记为 $A \overset{\text{相似}}{\sim} B$. 相似是方阵之间的等价关系.

性质

$$A \overset{\text{相似}}{\sim} B \Longrightarrow \begin{cases} \forall \text{ 多项式 } f(x), f(A) \overset{\text{相似}}{\sim} f(B); \\ \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B); \\ |A| = |B|; \\ \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B); \\ \varphi_A(\lambda) = \varphi_B(\lambda). \end{cases}$$

注.

(1). 彼此相似的矩阵都具有的性质，称为**相似不变量**.

(2). 反之未必成立!

(3). 这些性质还不能用来判定两矩阵相似, 但可用来说明两矩阵不相似.

相似于对角阵

性质

(1). 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的互不相同的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{it_i}$ 是 A 的属于 λ_i 的线性无关的特征向量, 则向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1t_1}, \boldsymbol{\alpha}_{21}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{2t_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{st_s}$$

也线性无关.

(2). 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则

$$\begin{aligned} A \text{ 相似于对角阵 } &\iff A \text{ 有 } n \text{ 个线性无关的特征向量} \\ &\iff \dim V_A(\lambda_1) + \dim V_A(\lambda_2) + \cdots + \dim V_A(\lambda_s) = n \\ &\iff \mathbb{F}^n = V_A(\lambda_1) \oplus V_A(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V_A(\lambda_s) \end{aligned}$$

(3). 特别地, $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 在 $\mathbb{F}$ 中有 n 个不同特征值 $\Longrightarrow$ A 在 $\mathbb{F}$ 上相似于对角阵.

几何重数

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则 $\dim V_A(\lambda_i)$ 称为 λ_i 的**几何重数**.

代数重数

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\lambda_i \in \mathbb{F}$, 若 $\varphi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{n_i} g_i(\lambda)$, $g_i(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, 且$\lambda-\lambda_i \nmid g_i(\lambda)$, 则$n_i$ 称为 λ_i 的**代数重数**.

性质

若λ_i是A的特征值, 则有 $\dim V_A(\lambda_i) \leqslant n_i$, 即

$$\textbf{几何重数} \leqslant \textbf{代数重数}.$$

定理

A 在数域$\mathbb{F}$上可相似对角化 $\Longleftrightarrow$ 在$\mathbb{F}$上$\varphi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$, 并且$\dim V_A(\lambda_i) = n_i$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant s$.

求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵的步骤

step 1. 求出 $\varphi_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ 在 $\mathbb{F}$ 中全部不相同的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$.

step 2. 对每个 λ_i, 解线性方程组 $(\lambda_i I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得解空间的一组基

$\{\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{in_i}\}$, 其中$n_i = n - \operatorname{rank}(\lambda_i I_n - A) = \dim V_A(\lambda_i)$.

step 3. 取 $P = (\boldsymbol{\alpha}_{11}, \boldsymbol{\alpha}_{12}, \ldots \boldsymbol{\alpha}_{1n_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{s1}, \boldsymbol{\alpha}_{s2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{sn_s})$, 则有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

相似于上 (下) 三角阵

复方阵

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为复矩阵 A 的全部特征值, 则

$$A \overset{\text{相似}}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}; \quad A \overset{\text{相似}}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ * & \cdots & \lambda_{n-1} & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

数域$\mathbb{F}$

若 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则

$$A \text{ 在 } \mathbb{F} \text{ 上相似于一个上 (下) 三角阵} \iff A \text{ 在 } \mathbb{F} \text{ 中有 } n \text{ 个特征值}.$$

应用

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的全部特征值, $f(x)$ 为多项式. 则 $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$. 特别的, $\det(f(A)) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$.

一般线性空间上的线性映射与线性变换

定义

设 V, W 为 $\mathbb{F}$ 上线性空间. 若映射 $\mathscr{A}: V \longrightarrow W$ 满足

(1). $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)$,

(2). $\mathscr{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$,

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\lambda\in\mathbb{F}$, 则称 $\mathscr{A}$ 为 V 到 W 的一个**线性映射**. 记 $L(V,W)$ 为 V 到 W 的所有线性映射组成的集合.

- 当 $V=W$ 时, 线性映射 $\mathscr{A}: V \longrightarrow V$ 称为 V 上的**线性变换**. 记 $L(V)$ 为 V 上所有线性变换组成的集合.
- **性质**同 $\mathscr{A}\in L(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$. 特别有

  (3). $\mathscr{A}$ 保持线性组合:

  $$\mathscr{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s)=\lambda_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+\lambda_s\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s).$$

  (4). 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 在 $\mathbb{F}^n$ 中线性相关, 则$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 在 $\mathbb{F}^m$ 中线性相关.

例1.

- 在 $L(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 中, 取 $A = \mathbf{O}$, 得 $\Phi(A) = \mathscr{O}\colon \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$, $\boldsymbol{\alpha} \longmapsto \mathbf{0}$ 零映射.
- 在 $L(\mathbb{F}^n)$ 中, 取 $A = I_n$, 得 $\Phi(A) = \mathscr{E}\colon \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{\alpha} \longmapsto \boldsymbol{\alpha}$ 恒等变换.
- 在 $L(\mathbb{F}^n)$ 中, $\lambda \in \mathbb{F}$, 取 $A = \lambda I_n$, 得 $\Phi(A)\colon \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{\alpha} \longmapsto \lambda\boldsymbol{\alpha}$ 数乘变换.
- 在 $L(V, W)$ 中, 有 $\mathscr{O}\colon V \longrightarrow W$, $\boldsymbol{\alpha} \longmapsto \mathbf{0}$ 零映射.
- 在 $L(V)$ 中, 有 $\mathscr{E}\colon V \longrightarrow V$, $\boldsymbol{\alpha} \longmapsto \boldsymbol{\alpha}$ 恒等变换 (单位变换).
- 在 $L(V)$ 中, $\mathscr{A}\colon V \longrightarrow V$, $\boldsymbol{\alpha} \longmapsto \lambda\boldsymbol{\alpha}$ 数乘变换.

例2：嵌入映射

(1). 当 $n < m$ 时，取 $A = \begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}$，得

$$\Phi(A) = \iota\colon\ \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

称 ι 为 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的**嵌入**.

(2). 若W是V的子空间，有线性映射

$$\mathrm{inc}\colon W \hookrightarrow V$$
$$\boldsymbol{\alpha} \longmapsto \boldsymbol{\alpha},$$

为**嵌入映射**.

例3: 投影映射

(1). 当 $n > m$ 时, 取 $B = (I_m, \mathbf{O})$, 得

$$\Phi(B) = \pi \colon \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

称 π 为 $\mathbb{F}^n$ 在 $\mathbb{F}^m$ 上的**投射(投影)**.

(2). 若W是V的子空间, 存在子空间 U, 使得$W \oplus U = V$. 定义

$$\pi_U : V = W \oplus U \longrightarrow W$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \longmapsto \boldsymbol{\alpha}_1,$$

易证 $\pi_U \in L(V, W)$.

例4.

考虑实空间 $V=\mathbb{R}[x]$, 则

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}: f(x) &\longmapsto f(x+1)\\
\mathscr{B}: f(x) &\longmapsto xf(x)\\
\mathscr{C}: f(x) &\longmapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\\
\mathscr{D}: f(x) &\longmapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=f'(x)
\end{aligned}$$

都是 V 上的线性变换.

线性变换$\varphi_{A,B}$

取定方阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 定义$\varphi_{A,B}\in L(\mathbb{F}^{m\times n})$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{A,B}: \mathbb{F}^{m\times n} &\longrightarrow \mathbb{F}^{m\times n}\\
X &\longmapsto AX-XB.
\end{aligned}$$

线性映射与线性变换在基下的矩阵

线性映射的矩阵表示

设 $\dim V = n$, 取定 V 的一组基 $\Gamma = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$; $\dim W = m$, W 的基 $\Lambda = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\}$. 对任意线性映射 $\mathscr{A} \in L(V, W)$, 若

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j) = a_{1j}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{2j}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{\beta}_m,$$

则矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 使得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) &= \big(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)\big) \\ &=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)A\end{aligned}$$

称 A 为线性映射 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 Γ 和 W 的基 Λ 下的矩阵.

同构

取定基 Γ 和 Λ, 映射 $\Phi: L(V,W) \longrightarrow \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathscr{A} \longmapsto A$ 是 $\mathbb{F}$ 上线性空间同构.

坐标变换

对任意 $\xi \in V$, 设 $\xi = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则

$$\mathscr{A}(\xi) = \left(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \cdots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

从而 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为 $\mathscr{A}(\xi)$ 在 W 的基 Λ 下的坐标.

线性变换的矩阵表示

设 $\mathscr{A} \in L(V)$, 取定 V 的基 $\Gamma = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$, 则存在方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) &= \big(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)\big) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A\end{aligned}$$

称 A 为线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 Γ 下的矩阵.

同构

取定 V 的基 Γ, 映射 $\Phi : L(V) \longrightarrow \mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathscr{A} \longmapsto A$ 是 $\mathbb{F}$ 上线性空间同构.

线性映射在不同基下的矩阵

设 $\mathscr{A} \in L(V,W)$ 在 V 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 W 的基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m\}$下的矩阵和 V 的基 $\{\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n\}$ 与 W 的基 $\{\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m\}$ 下的矩阵分别为 A 与 B, 即

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n) &=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)A,\\ \mathscr{A}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n) &=(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m)B.\end{aligned}$$

设基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n\}$ 的过渡矩阵为 Q, 基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m\}$ 到 $\{\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m\}$ 的过渡矩阵为 P, 即

$$(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n) =(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)Q, \quad (\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m) = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)P.$$

则 Q 与 P 分别是 n 阶与 m 阶可逆方阵. 立即有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n) &=\mathscr{A}\big((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)Q\big) = (\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\ldots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n))Q\\ &=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)AQ = (\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m)P^{-1}AQ,\end{aligned}$$

也就是 $B = P^{-1}AQ$.

相抵关系

线性映射在不同基下的矩阵是相抵的.

逆命题

若矩阵 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 相抵, 即 $\exists Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ 可逆, 使得 $B = PAQ$. V 和 W 分别是 $\mathbb{F}$ 上 n 维和 m 维线性空间, **希望找到 $\mathscr{A} \in L(V, W)$ 使得 A, B 是 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵.**

$\mathscr{A}$ 的构造

任取 V 的基 $\Gamma = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$, W 的基 $\Lambda = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\}$, 记

$$(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m)A \in W.$$

定义映射 $\mathscr{A} : V \longrightarrow W$ 使得 $\mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{\alpha}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{\gamma}_i$. 则 **$\mathscr{A}$ 是 V 到 W 的线性映射**, 并且 $\mathscr{A}$ 在基 Γ 和 Λ 下的矩阵为 A.

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m)A.$$

定理1

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间, $\Gamma = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的基. 对 $\mathbb{F}$ 上任意线性空间 W 以及 n 个向量 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n$, 存在唯一线性映射 $\mathscr{A} \in L(V, W)$, 使得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j) = \boldsymbol{\gamma}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

新的基

记

$$\begin{aligned}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n) =& (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) Q, \\ (\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m) =& (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m) P^{-1}.\end{aligned}$$

由于 P, Q 可逆, 从而 $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n\}$ 和 $\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m\}$ 分别是 V 和 W 的基, 并且有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n) =& (\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2), \ldots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)) Q = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m) A Q \\ =& (\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m) P A Q = (\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_m) B.\end{aligned}$$

主要定理

$A \overset{\text{相抵}}{\sim} B \Longleftrightarrow A, B$ 是同一个线性映射 $A: V \longrightarrow W$ 在不同基下的矩阵.

相抵标准形

对任意线性映射 $\mathscr{A} \in L(V, W)$, 存在 V 的基 $\Gamma = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 W 的基 $\Lambda = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\}$, 使得 $\mathscr{A}$ 在 Γ 和 Λ 下的矩阵为:

$$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} A(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\beta}_i, & 1 \le i \le r, \\ A(\boldsymbol{\alpha}_j) = \mathbf{0}, & r+1 \le j \le n. \end{cases}$$

线性变换在不同基下的矩阵: 相似关系

设 $\mathscr{A} \in L(V)$ 在 V 的基 $\Gamma = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和基 $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n\}$ 下的方阵分别为 A 与 B, 即

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)A, \\ \mathscr{A}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n) &= (\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n)B. \end{aligned}$$

设 Γ 到 $\widetilde{\Gamma}$ 的过渡矩阵为 P, 则有 $B = P^{-1}AP$, 即 $A \overset{\text{相似}}{\sim} B$.

相似关系的几何意义

设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, V 是 $\mathbb{F}$ 上任意 n 维线性空间, 则:

$A \overset{\text{相似}}{\sim} B \Longleftrightarrow$ 存在 $\mathscr{A} \in L(V)$ 使得 A, B 是 $\mathscr{A}$ 在 V 的不同基下的矩阵.

相似标准形

- 复数域 $\mathbb{C}$: **Jordan标准形理论**.
- 一般数域 $\mathbb{F}$: **有理标准形理论**.