第3章：矩阵

§1. 线性代数(B1)回顾

中国科学技术大学数学科学学院

2025年9月15日

矩阵的定义

- 由 $m\times n$ 个数(元素)排成的 m 行 n 列的表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

  称为一个 $m\times n$ 的矩阵.

- a_{ij}称为A的第(i,j)-元素
- 当$a_{ij}\in\mathbb{F}$时, 称A为$\mathbb{F}$上的矩阵（如实矩阵, 复矩阵）
- $A=(a_{ij})_{m\times n}$与$B=(b_{ij})_{k\times l}$**相等** $\iff \begin{cases} m=k \text{ 且 } n=l\\ a_{ij}=b_{ij}\ (\forall i,j)\end{cases}$

特殊矩阵

行向量

$1 \times n$ 矩阵

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

也被称为n维行向量.

列向量

$n \times 1$ 矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 也被称为$n$维列向量.

方阵

$m = n$ 时称为 n 阶方阵

对角阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

单位矩阵

$$I_n \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ 称为n阶单位阵.

数量矩阵

$$cI_n \triangleq \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$ 称为纯量阵或数量阵.

对称矩阵和反对称矩阵

- **对称矩阵：** $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall 1 \leq i, j \leq n)$
- **反对称矩阵：** $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij} = -a_{ji}$ $(\forall 1 \leq i, j \leq n)$

上三角矩阵

- $m \geq n$ 时, $\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- $m \leq n$时, $\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{mm} & * & \cdots & * \end{pmatrix}$

下三角阵

- $m \geq n$ 时, $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$

- $m \leq n$时, $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

矩阵运算: 加法

矩阵加法的定义

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$，则

$$A+B \triangleq \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵加法性质

矩阵加法满足以下性质：

(A1) 交换律: $A+B=B+A$

(A2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

(A3) 零元存在: $\exists \mathbf{O}$, s.t. $A+\mathbf{O}=A$

(A4) 负元存在: $\exists -A$, s.t. $A+(-A)=\mathbf{O}$

注:

(1) $\mathbf{O} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ ——零矩阵

(2) $-A \triangleq \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$ ——A 的负矩阵

(3) 定义减法：$A - B \triangleq A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$

矩阵运算: 数乘

定义

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘性质

数乘满足以下性质：

(D1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

(D2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

(M1) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

(M2) $1A = A$

矩阵乘法

矩阵乘法定义

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{m\times s}$$

基本矩阵E_{kl}

- $E_{kl} \triangleq (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m\times n}$, 则有 $A = (a_{ij})_{m\times n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$.
- 理解$E_{ij}A$和AE_{ij}

理解矩阵乘法的四个角度

- 从元素的角度
- 从列的角度
- 从行的角度
- 从矩阵的角度

矩阵乘法性质

矩阵乘法满足：

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $IA = AI = A$

(3) $(A+B)C = AC + BC$

(4) $A(B+C) = AB + AC$

(5) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

注

(1) 一般地，$AB \neq BA$!

- 与任意 n 阶方阵都相乘可换的方阵一定是数量矩阵 cI_n.
- 设 $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不等. 则与 A 相乘可换的一定是对角阵.

(2) $CD = \mathbf{O} \not\Rightarrow C = \mathbf{O}$ 或 $D = \mathbf{O}$

(3) $AC = BC \not\Rightarrow A = B$

矩阵幂与多项式

矩阵的幂

$$A^0 \triangleq I_n, \quad A^1 = A, \quad A^{k+1} \triangleq A^k A$$

矩阵多项式

对于多项式 $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_t x^t$

$$f(A) \triangleq c_0 I_n + c_1 A + \ldots + c_t A^t$$

注

若多项式满足$f(x)g(x) = h(x)$, 则$f(A)g(A) = h(A)$. 但是, 一般来说

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2.$$

特殊矩阵

幂零矩阵

存在正整数 k，使得 $A^k = \mathbf{O}$

幂幺矩阵

存在正整数 k，使得 $A^k = I_n$

对合矩阵

满足 $A^2 = I_n$

幂等矩阵

满足 $A^2 = A$

共轭、转置与迹

定义

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

- 共轭矩阵：$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$
- 转置矩阵：$A^T=(a_{ji})_{n\times m}$
- 迹（方阵）：$\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

共轭性质

(1) $\overline{\overline{A}}=A$

(2) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

(3) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda A}$

(4) $\overline{AB}=\overline{AB}$

性质

转置性质

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

迹的基本性质

(1) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$

(2) $\mathrm{tr}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$

(3) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

(4) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A)$

(5) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

可逆矩阵的定义—2025年9月17日

给定矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 如果存在矩阵$B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 使得$AB = I_m$, $BA = I_n$, 则称A可逆, 记$B = A^{-1}$.

注

- 如果A可逆, 则$m = n$, 并且逆唯一.

伴随方阵

$A = (a_{ij})_{n\times n}$, A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式, 定义n阶方阵A^*为

$$A^* \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ji})_{n\times n},$$

称为方阵A的**伴随方阵**(adjoint matrix).

结论

- 对任意方阵A有$AA^* = A^*A = \det A \cdot I_n$.
- 方阵A可逆 $\iff \det(A) \neq 0$.
- 若方阵A可逆, 则
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*.$$

性质

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

注

给定矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

- 如果存在矩阵$B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 使得$AB = I_m$, 则称$A$**右可逆**.
- 如果存在矩阵$B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 使得$BA = I_n$,, 则称$A$**左可逆**.

分块矩阵

分块矩阵加法

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}$$

数乘

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1s} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda A_{r1} & \lambda A_{r2} & \cdots & \lambda A_{rs} \end{pmatrix}$$

分块矩阵乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times l}$. 将 A 和 B 做如下分块

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \end{array}, \quad B=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} \end{array},$$

其中$m_1+m_2+\cdots+m_r=m$, $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$, $l_1+l_2+\cdots+l_t=l$. 则

$$AB=C=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix} \end{array}$$

其中$C_{pq}=A_{p1}B_{1q}+A_{p2}B_{2q}+\cdots+A_{ps}B_{sq}=\sum\limits_{k=1}^{s}A_{pk}B_{kq}$.

准对角阵与交换性

(1) 形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_s)$$

的分块方阵称为**准对角阵**, 其中A_i未必是方阵. 类似可定义**准上(下)三角阵**.

(2) 设 $A = \operatorname{diag}(a_1 I_{n_1}, a_2 I_{n_2}, \cdots, a_s I_{n_s})$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 两两不等, 则与 A 相乘可换的矩阵一定形如

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_s)$$

其中 B_i 是 n_i 阶方阵.

转置

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix} = (A_{ji}^T)$$

共轭

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A_{11}} & \overline{A_{12}} & \cdots & \overline{A_{1s}} \\ \overline{A_{21}} & \overline{A_{22}} & \cdots & \overline{A_{2s}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{A_{r1}} & \overline{A_{r2}} & \cdots & \overline{A_{rs}} \end{pmatrix} = (\overline{A_{ij}})$$

迹

若$r = s$, 且A_{ii} 全为方阵, 则

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A_{11}) + \mathrm{tr}(A_{22}) + \cdots + \mathrm{tr}(A_{ss}).$$

矩阵的初等变换

矩阵的初等行列变换

- 交换A中两行（列）
- 用非零常数λ乘A的某一行（列）
- 将A的某一行（列）的λ倍加到A的另一行（列）

初等矩阵

对单位矩阵 I_n 进行一次初等变换得到的矩阵为**初等矩阵**. 初等矩阵共有三种形式: S_{ij}, $D_i(\lambda)$, $T_{ij}(\lambda)$.

结论

- 对 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 做一次初等行（列）变换，相当于 A 左（右）乘上一个相应的 $m \times m$ 初等矩阵（$n \times n$ 初等矩阵）.
- 用 Gauss消元法求解线性方程组也就是对增广矩阵进行初等行变换.

交换矩阵

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

缩放矩阵

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \neq 0)$$

消元矩阵

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad i < j.$$

初等方阵的逆

- $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$.
- $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$.
- $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.

分块矩阵初等变换

广义初等变换

对分块矩阵进行初等行（列）变换，称为广义初等变换.

广义初等矩阵换

$$\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一次广义初等变换}}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & I_n \\ I_m & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{O} & I_m \\ I_n & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{O} \\ X & I_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_m & Y \\ \mathbf{O} & I_n \end{pmatrix}.$$

结论

对 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 做一次广义初等行（列）变换，就相当于在 M 的左边（右边）乘上相应的广义初等矩阵。

LU分解

如果方阵A可以分解为两个方阵的乘积

$$A = L \cdot U$$

其中L是一个n阶下三角方阵, 其主对角线上的元素都是1; U是一个n阶上三角矩阵, 则称分解为A的**LU分解**.

定理

任意矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 存在$m$阶可逆方阵$P$和$n$阶可逆方阵$Q$, 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$, 其中非负整数$r$由$A$唯一决定.

结论

- 方阵A可逆当且仅当A可以分解为一系列(有限个)初等方阵的乘积.
- 对增广矩阵 $(A \mid I)$ 做初等行变换:

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{行变换}} (I \mid A^{-1}).$$

矩阵相抵

定义

设$A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 如果存在一系列(有限个)初等变换将矩阵$A$化成矩阵$B$, 则称**矩阵$A$和$B$相抵**.

定理

设$A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则$A, B$相抵当且仅当存在$m$阶可逆方阵$P$和$n$阶可逆方阵$Q$使得

$$B = PAQ.$$

相抵是一种等价关系

(1) A与A相抵;

(2) 若A与B相抵, 则B与A相抵;

(3) 若A与B相抵, 且B与C相抵, 则A与C相抵.

所有$m \times n$矩阵的全体依据相抵关系可分解为一些不相交的子集的并, 每个子集称为一个**相抵等价类**.

等价关系

定义

- 集合元素间满足**自反性、对称性、传递性**的关系称为**等价关系**, 等价关系一般用~表示.
- 对于集合A中元素a, 定义$[a] \triangleq \{b \in A \,|\, b \text{ 与 } a \text{ 等价}\}$, 称为$a$所在的**等价类**.
- $[a] \cap [b] = \begin{cases} [a] = [b], & \text{如果 } a \sim b, \\ \emptyset, & \text{如果 } a \nsim b. \end{cases}$

基本问题

(1) 两个矩阵属于同一相抵等价类的条件是什么? 或者说,设A, B均为$m \times n$矩阵A与B相抵的**充要条件**是什么? (**相抵不变量**)

(2) 在每个相抵等价类中, 最简单的**代表元**具有怎样的形式? 也就是说,对每个$m \times n$矩阵,与它相抵的最简矩阵(**相抵标准形**)是什么?

矩阵的秩与相抵

定义

设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 前述定理中的矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$称为$A$的**相抵标准形**. 整数$r$称为矩阵$A$的**秩**, 记为$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{r}(A) = r$. 若$r = m$, 则$A$称为是**行满秩的**; 若$r = n$, 则$A$称为是**列满秩的**. 特别地, 零矩阵的秩等于0.

定理

- 设A, B是同阶矩阵, 则A与B相抵当且仅当$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.
- 设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, P, Q分别是m, n阶可逆方阵, 则$\mathrm{rank}(PAQ) = \mathrm{rank}(A)$.
- 设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, P, Q分别是m, n阶初等方阵, 若A的所有k阶子式都为零, 则PA与AQ的所有k阶子式也为零.
- 矩阵A的非零子式的最高阶数等于矩阵A的秩.

定义

设矩阵A至少有一个r阶非零子式, 且A的所有$r+1$阶子式都为零, 则称A的**秩**为r. 即A的**秩**定义为A的非零子式的最高阶数.

性质

- $\mathrm{rank}(A^T) = \mathrm{rank}(A)$.
- $\mathrm{rank}(AB) \le \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$.
- $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ \mathbf{O} & B \end{pmatrix} \ge \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.
- 线性方程组$Ax = b$有解,当且仅当$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(J) = \mathrm{rank}(A, b) = r$.