第2章：行列式

§1. 线性代数(B1)回顾

中国科学技术大学数学科学学院

2025年9月8日

行列式的引入

十七世纪末

- 行列式最早用于求解线性方程组（日本：关孝和；德国：莱布尼茨）

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

几何意义

- $n = 2$：面积
- $n = 3$：体积

行列式的定义

定义1（递归：按第一列展开）

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$$

- M_{ij}：余子式（去掉第i行第j列的子矩阵行列式）
- $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$：代数余子式

一行（列）Laplace展开定理

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

行列式的性质

(1). 转置不变：$\det(A) = \det(A^T)$

(2). 交换两行变负的

(3). 某行乘以λ：行列式乘以λ

(4). 某一行可加性：

$$\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \beta_i, \ldots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \alpha_n)$$

(5). 两行成比例 $\Rightarrow \det = 0$

(6). 行倍加不变：

$$\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \lambda\alpha_j, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)$$

(7). 若 A, D 均是方阵, 则 $\det \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$

(8). 行列式是积性函数, 即 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

推论

Laplace展开定理

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Laplace展开定理+性质(5)

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, A_{ij} 为 $\det(A)$ 中 a_{ij} 的代数余子式. 则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = \begin{cases} \det(A), & \text{当 } k = i \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } k \neq i \text{ 时} \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ij} = \begin{cases} \det(A), & \text{当 } k = j \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } k \neq j \text{ 时} \end{cases}$$

推论

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $A^* = (A_{ji})_{n\times n}$ 为 A 伴随方阵。则

$$AA^* = A^*A = \det(A) \cdot I_n.$$

n重反对称规范线性函数

定义2

行列式函数 $\det : F^n \times \cdots \times F^n \to F$ 为满足下列性质的唯一函数:

- **反对称性:**

$$\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n).$$

- n**重线性性:**

$$\det(\alpha_1, \cdots, \lambda\alpha_i + \mu\beta_i, \cdots, \alpha_n) = \lambda \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n) + \mu \det(\cdots, \beta_i, \cdots, \alpha_n).$$

- **规范性:**

$$\det(e_1, \cdots, e_n) = \det I_n = 1.$$

记α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 $A = (a_{ij})_{n\times n}$的第i行行向量, 则 A的行列式**定义为**

$$\det(A) \triangleq \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

行列式的完全展开式

定义3

设 S_n 为 $1,\cdots,n$的所有排列组成的集合, $\tau(j_1,\cdots,j_n)$ 表示排列 $(j_1,\cdots,j_n)$ 的逆序数. 则 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式即

$$\det(A)=\sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in S_n}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}.$$

定理

上述三种定义是等价的.

$$\text{定义1}\Longrightarrow\text{定义2}\Longrightarrow\text{定义3}\Longrightarrow\text{定义1}.$$

Cramer法则

考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

也就是

$$Ax = b$$

其中$A = (a_{ij})_{n\times n}$. 若A的行列式$\Delta \neq 0$, 则上述方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

其中Δ_i是将A的第i列替换为b后所得方阵的行列式.

后续内容

- 多行（列）Laplace展开定理, 参见课堂笔记或教材P55 §2.3等.
- 行列式的计算, 参见课堂笔记以及教材P72 §2.5等.
- 反对称矩阵相关结果, 参见课堂笔记以及教材P66 习题8、P86 习题3等.
- 主角占有方阵行列式非零, 参见课堂笔记或教材P86 习题5.