25RAmid 解答

涂嘉乐

2026 年 5 月 2 日

题目 1（15 points）

(1). 简述函数 f 可测的定义

(2). 求证：$|f|$ 可测且 $\{f>0\}$ 可测，证明 f 可测

证明 (1). 称 $f:E\to[-\infty,+\infty]$ 可测，若 $\forall a\in\mathbb{R},\{f<a\}\in\mathscr{L}$

(2). 设 $|f|$ 可测且 $\{f>0\}\in\mathscr{L}$。对任意 $a\in\mathbb{R}$，证明 $\{f<a\}\in\mathscr{L}$。

若 $a\le 0$，则

$$\{f<a\}=\{f\le 0\}\cap\{|f|>-a\},\quad \{f\le 0\}=\{f>0\}^c\in\mathscr{L},$$

而

$$\{|f|>-a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|f|\ge -a+\tfrac{1}{n}\},\quad \{|f|\ge -a+\frac{1}{n}\}=\{|f|<-a+\frac{1}{n}\}^c\in\mathscr{L}$$

故 $\{f<a\}\in\mathscr{L}$。

若 $a>0$，则

$$\{f<a\}=\{f\le 0\}\cup(\{f>0\}\cap\{|f|<a\}),$$

右侧各集合均可测，故 $\{f<a\}\in\mathscr{L}$，综上 f 可测 □

注

$$\{f<a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{f\le a-\frac{1}{n}\right\},\qquad \{f\le a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f<a+\frac{1}{n}\right\}$$

$$\{f>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{f\ge a+\frac{1}{n}\right\},\qquad \{f\ge a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{f>a-\frac{1}{n}\right\}$$

题目 2（15 points）设 $\mathcal{N}$ 是 Vitali 不可测集，证明

(1) $\mathcal{N}$ 的可测子集一定为零测集

(2) $m_*(E)=0\iff E$ 的任何子集都是可测集

证明 (1). 假设 $E\subset\mathcal{N}$ 可测，设 $\{r_k\}$ 为 $[-1,1]$ 内的有理数的一个排列，则我们有 $\forall i,m(E+r_k)=m(E),E+r_k\subset\mathcal{N}+r_k$，这就说明（不交并由 Vitali 集的构造保证）

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty}E+r_k\subset\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}+r_k\subseteq[-1,2]$$

由测度的单调性、可数可加性知

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E+r_k)\le m([-1,2])=3$$

由无穷级数收敛知 $m(E)=0$

(2). $(\Longrightarrow)$: 由外测度的单调性和零测集可测，显然

$(\Longleftarrow)$: ***Claim***：若 $m_*(G)>0$，则 G 有不可测子集

Proof Of Claim : 由外测度的次可数可加性知

$$G=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} G\cap[k,k+1]\Rightarrow 0<m_*(G)\leq\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_*(G\cap[k,k+1])$$

所以，一定存在 $k\in\mathbb{Z}$, s.t. $m_*(G\cap[k,k+1])>0$，通过将 $[k,k+1]$ 平移至 $[0,1]$，我们可以不妨假设 $m_*(G\cap[0,1])>0$，即我们可以不妨假设 G 是 $[0,1]$ 的子集，因为

$$[0,1]\subset\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(\mathcal{N}+r_k)\Longrightarrow G\subseteq\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\left(G\cap(\mathcal{N}+r_k)\right)\Longrightarrow 0<m_*(G)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m_*\left(G\cap(\mathcal{N}+r_k)\right)$$

则一定 $\exists r_{n_0}\in\{r_k\}$, s.t. $m_*\big(G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})\big)>0$，若 $G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})$ 可测，我们将它平移 $-r_{n_0}$，则

$$G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})\subseteq\mathcal{N}+r_{n_0}\Longrightarrow[G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})]-r_{n_0}\subseteq\mathcal{N}$$

由可测集经平移后也可测知 $[G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})]-r_{n_0}$ 也可测，由 (1) 知 $\mathcal{N}$ 的可测子集测度一定为零

$$m([G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})]-r_{n_0})=0\Longrightarrow m\big(G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})\big)=0$$

这与它的外测度大于零矛盾！因此 $G\cap(\mathcal{N}+r_{n_0})$ 不可测，这就是我们要找的不可测集

回到本题，已知 E 的任何子集都是可测集，若 $m_*(E)>0$，则必有不可测子集，矛盾！ □

题目 3（10 points）设 $B=\{x:||x||\leq 1\}$，且 f 非负可测满足 $\int_B f\mathrm{d}m=1$，求证

$$\int_B f(x)||x||\mathrm{d}m<1$$

证明 反证，假设 $\int_B f(x)\|x\|\,\mathrm{d}m\geq 1$ ，由于 $0\leq\|x\|\leq 1$ on B，且 $f\geq 0$，则

$$\int_B f(x)\|x\|\,\mathrm{d}m\leq\int_B f(x)\,\mathrm{d}m=1\Longrightarrow\int_B f(x)\|x\|\,\mathrm{d}m=1$$

因此

$$0=\int_B f(x)\,\mathrm{d}m-\int_B f(x)\|x\|\,\mathrm{d}m=\int_B f(x)(1-\|x\|)\,\mathrm{d}m$$

因为 $f\geq 0$，$1-\|x\|\geq 0$，所以

$$f(x)(1-\|x\|)=0\text{ a.e on }B$$

因为在 $||x||<1$ 时，$f(x)(1-||x||)=0\Longrightarrow f(x)=0$，故 $f(x)=0$ a.e on $B\backslash\partial B$，而 $\partial B=\{x:||x||=1\}$ 是零测集，所以 $f=0$ a.e on B，进而 $\int_B f\mathrm{d}m=0$，这与题设矛盾！ □

注 本题主要用到结论：若 $m(E)>0, f\geq 0, \int_E f\mathrm{d}m=0$，则 $f=0$ a.e on E，这可以使用切比雪夫不等式证明

题目 4（10 points）求

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x+\sin^k x}{1-e^{-kx}+x^k}\mathrm{d}x$$

解 设被积函数为 $f_k(x)$，固定 $x\in[0,1)$，则 $\sin^k(x)\to 0, e^{-kx}\to 0, x^k\to 0$，所以

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{x+\sin^k(x)}{1-e^{-kx}+x^k}=x$$

固定 $x\in[1,+\infty)$，将分子中的 sin 放大成 1，分母放小为 x^k，则我们有

$$0\le\lim_{k\to\infty}f_k(x)\le\lim_{k\to\infty}\frac{x+1}{x^k}=0\Longrightarrow\lim_{k\to\infty}f_k(x)=0$$

接下来寻找控制函数，$x\in[0,1)$ 时，对于分子，因为 $\sin x\le x, x^k\le x$，所以 $x+\sin^k(x)\le x+x^k\le 2x$，对于分母，利用 $1-e^{-kx}+x^k\ge 1-e^{-x}$；$x\in[1,+\infty)$ 时，当 $k\ge 3$ 时，将分母放小成 x^3，分子放大成 $x+1$，则

$$\frac{x+\sin^k x}{1-e^{-kx}+x^k}\le\begin{cases}\frac{2x}{1-e^{-x}}, & 0<x<1\\ \frac{x+1}{x^3}, & x\ge 1\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-e^{-x}}\overset{洛}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{e^{-x}}=2$，所以 $\frac{2x}{1-e^{-x}}$ 在 $[0,1]$ 上有上界 M，故我们取控制函数为

$$g(x)=\begin{cases}M, & x\in[0,1)\\ \frac{x+1}{x^3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

对 $k\ge 3$ 我们有 $|f_k|\le g$，且 $g\in L^1(\mathbb{R})$，由 DCT 知

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{+\infty}f_k\mathrm{d}m=\int_0^{+\infty}\lim_{k\to\infty}f_k\mathrm{d}m=\int_0^1 x\mathrm{d}m=\frac{1}{2}$$

□

注 控制函数不可以和 k 有关。因为取极限时舍去有限项极限并不改变，所以我们在找控制函数时设 $k\ge 3$

题目 5（20 points）设 f, f_k 在 $[0,1]$ 上可测，证明或给出反例

(1) $f_n\xrightarrow{L^1}f$ 能否推出 $f_n\xrightarrow{L^2}f$

(2) $f_n\xrightarrow{L^2}f$ 能否推出 $f_n\xrightarrow{L^1}f$

(3) $f_n\xrightarrow{m}f$ 能否推出 $\lim\limits_{n\to\infty}m(|f_n-f|>0)=0$

证明 (1). 不能，考虑

$$f_n(x)=\begin{cases}n^{\frac{1}{2}}, & x\in[0,\frac{1}{n})\\ 0, & x\in[\frac{1}{n},1]\end{cases}\qquad f(x)\equiv 0$$

则

$$||f_n-f||_{L^1}=\int_0^{\frac{1}{n}}n^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}m=n^{-\frac{1}{2}}\to 0$$

则 $f_n\xrightarrow{L^1}f$，但

$$||f_n-f||_{L^2}=\left(\int_0^{\frac{1}{n}}(n^{\frac{1}{2}})^2\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}}=1$$

(2). 能，由 Holder 不等式，取共轭指标 $(p,q)=(2,2)$

$$\begin{aligned}||f_n-f||_{L^1}&=||(f_n-f)\chi_{[0,1]}||_{L^1}\\&\le ||f_n-f||_{L^2}\cdot||\chi_{[0,1]}||_{L^2}\\&=||f_n-f||_{L^2}\to 0\end{aligned}$$

(3). 不能，考虑

$$f_n(x)\equiv\frac{1}{n},\quad f(x)\equiv 0$$

则对 $\forall\varepsilon>0$，当 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 时，就有 $|f_n-f|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $m(\{|f_n-f|\ge\varepsilon\})=m(\varnothing)=0$，所以 $f_n\xrightarrow{m}f$，但是对 $\forall n\in\mathbb{N}^*,m(|f_n-f|>0)=m([0,1])=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}m(|f_n-f|>0)=1$ □

题目 6（15 points）设 $E_k=\{|f|\ge k\}$ 且 f 可积，求证：

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(E_k)<+\infty$

证明 (1). 由 Chebychev 不等式

$$km(E_k)=\int_{E_k}k\mathrm{d}m\le\int_{E_k}|f|\mathrm{d}m\le\int_{\mathbb{R}^d}|f|\mathrm{d}m\Longrightarrow m(E_k)\le\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^d}|f|\mathrm{d}m$$

由 f 可积知 $\int_{\mathbb{R}^d}|f|\mathrm{d}m<+\infty$，故 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$

(2). 这是 4 月 8 日作业题，考虑 $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)$，我们先证明 $g(x)\le|f(x)|$：

若 $g(x)<+\infty$，设 $g(x)=k$，则由定义，只能是 $\chi_{E_1}=\cdots=\chi_{E_k}=1,\chi_{E_m}=0,m\ge k+1$，由 $\chi_{E_k}(x)=1$ 知 $|f(x)|\ge k$，故 $g(x)\le k\le|f(x)|$

若 $g(x)=+\infty$，则 x 在无穷多个 E_k 中，故只能是 $|f(x)|=+\infty$，即 $g(x)=|f(x)|=+\infty$

或者更简洁地，我们有

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)=\#\{k\in\mathbb{N}^*:k\le|f(x)|\}\le|f(x)|$$

由逐项积分定理或 Tonelli 定理

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{E_k}\mathrm{d}m&=\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}\mathrm{d}m\\&\le\int_{\mathbb{R}^d}|f|\mathrm{d}m<+\infty\end{aligned}$$

□

题目 7（15 points）设 g 为周期为 1 的光滑函数，且 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=0$

(1) 求证：对任意闭区间 $[a,b]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(nx)\mathrm{d}x=0$$

(2) 对任意可积函数 f，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)g(nx)\mathrm{d}x=0$$

证明 (1). 由 $g(x)$ 周期为 1 的光滑函数知 $g(x)$ 有上界 M，即 $|g(x)|\le M,\forall x\in\mathbb{R}$，由 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=0$ 和周期性知，对 $\forall a\in\mathbb{R},\int_a^{a+1}g(x)\mathrm{d}x=0$，因为

$$\left|\int_a^b g(nx)\mathrm{d}x\right| \xlongequal{y=nx} \left|\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}g(y)\mathrm{d}y\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\int_{na}^{[na]+1}g(y)\mathrm{d}y+\int_{[nb]}^{nb}g(y)\mathrm{d}y\right)\right| \le \frac{2M}{n}\to 0$$

（这里我们考虑 n 足够大时，必有 $[na]+1<[nb]$）

(2). 我们把第一问的积分范围写成示性函数，即 $\int_{\mathbb{R}}\chi_{[a,b]}g(nx)\mathrm{d}x\to 0$，这里我们需要注意到 $\chi_{[a,b]}$ 是阶梯函数，所以由 $\{$阶梯函数$\}\overset{\text{dense}}{\subset}L^1(\mathbb{R})$ 知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在阶梯函数 $\varphi=\sum\limits_{i=1}^N c_i\chi_{[a_i,b_i]}$, s.t. $||\varphi-f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}<\frac{\varepsilon}{M}$，所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}[f(x)-\varphi(x)]g(nx)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)g(nx)\mathrm{d}x\right|\\ &\le M||f-\varphi||_{L^1(\mathbb{R})}+\left|\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^N c_i\chi_{[a_i,b_i]}g(nx)\mathrm{d}x\right|\\ &<\varepsilon+\sum_{i=1}^N|c_i|\cdot\left|\int_{a_i}^{b_i}g(nx)\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，由第一问知

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right|\le\varepsilon$$

再由 ε 的任意性即得证 $\square$