23RAmid 解答

涂嘉乐

2026 年 5 月 10 日

题目 1（20 分）判断正误（证明或者举反例证明你的结论）

(1) 连续函数可测

(2) 可积函数几乎处处有限

证明 (1) 正确，设 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 连续，对 $\forall a\in\mathbb{R},\{x\in\mathbb{R}^d:f(x)<a\}=f^{-1}((-\infty,a))$ 是连续函数 f 在开集 $(-\infty,a)$ 下的原像，故也是开集，从而 Lebesgue 可测，由 $a\in\mathbb{R}$ 的任意性知 f 可测

(2) 正确，下证 $m(\{x:|f(x)|=+\infty\})$ 测度为零，因为对 $\forall N\in\mathbb{N}^*$，有 $\{x:|f(x)|=+\infty\}\subseteq\{x:|f(x)|\geq N\}$，由 Chebyshev 不等式知

$$m(\{x:|f(x)|=+\infty\})\leq m(\{x:|f(x)|>N\})\leq\frac{1}{N}||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

令 $N\to\infty$ 即得 $m(\{x:|f(x)|=+\infty\})=0$，故可积函数几乎处处有限 □

题目 2（15 分）叙述 Fatou 引理并举例说明其中严格不等式的情况可能发生

证明 Fatou 引理：设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 为可测集 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E\liminf_{k\to\infty}f_k\mathrm{d}m\leq\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m$$

考虑 $E=[0,1],f_k(x)=k\chi_{[0,\frac{1}{k}]}(x),f(x)\equiv0$，则 $f_k\to f$ a.e $x\in[0,1]$

$$\begin{cases}\int_E\liminf\limits_{k\to\infty}f_k\mathrm{d}m=\int_{[0,1]}f\mathrm{d}m=0\\ \liminf\limits_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m=1\end{cases}$$

□

题目 3（20 分）计算

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

证明 (1). 由于积分区间随 n 变化，我们将其看作 $[0,+\infty)$ 上的积分，定义

$$f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\chi_{[0,n]}(x)$$

下求 f_n 的逐点极限，固定 $x\in[0,+\infty)$，当 n 足够大时示性函数取 1，由数分知识有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=e^{\frac{x}{2}}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-\frac{x}{2}}$$

接下来寻找控制函数，利用 $e^x\geq 1+x$ 得

$$|f_n(x)|=\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\chi_{[0,n]}(x)\right|\leq e^{-\frac{x}{n}\cdot n}\cdot e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$$

我们取控制函数 $g(x)=e^{-\frac{x}{2}},x\in[0,+\infty)$，则由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty)}f_n\mathrm{d}m=\int_{[0,+\infty)}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}m=2$$

(2). 设被积函数为 f_n，使用注意力发现 $(1+x^2)^n=1+nx^2+\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{2k}\geq 1+nx^2$，即被积函数 ≤ 1，因此可以使用有界收敛定理，接下来求逐点极限（这个大家自己求一下，这里给出答案）

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\in(0,1]\end{cases}\overset{\text{def}}{=}f(x)$$

所以由有界收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x=\int_0^1 f\mathrm{d}m=0$$

□

题目 4（15 分）设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一一映射，且保持点集的外测度不变。证明：对于任何可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$，$f(E)$ 可测

证明 本题我们用 Carathéodory 可测证明，可以先看第一次习题课讲义第 12 页

任取 $A\subset\mathbb{R}^n$，由 f 是双射知

$$A=f(f^{-1}(A)),\quad A\cap f(E)=f(f^{-1}(A)\cap E),\quad A\setminus f(E)=f(f^{-1}(A)\setminus E)$$

第三条不是很平凡大家可以自己验证一下；对可测集 E 使用 Carathéodory 条件，对集合 $f^{-1}(A)$ 有 $m_*(f^{-1}(A))=m_*(f^{-1}(A)\cap E)+m^*(f^{-1}(A)\setminus E)$

又因为 f 保持点集的外测度不变，所以

$$\begin{cases}m^*(A)=m^*(f(f^{-1}(A)))=m^*(f^{-1}(A))\\ m^*(A\cap f(E))=m^*(f(f^{-1}(A)\cap E))=m^*(f^{-1}(A)\cap E)\\ m^*(A\setminus f(E))=m^*(f(f^{-1}(A)\setminus E))=m^*(f^{-1}(A)\setminus E)\end{cases}$$

综上我们有

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(f^{-1}(A)) \\ &= m^*(f^{-1}(A)\cap E) + m^*(f^{-1}(A)\setminus E) \\ &= m^*(A\cap f(E)) + m^*(A\setminus f(E)) \end{aligned}$$

由 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的任意性知，$f(E)$ 可测 □

题目 5（10 分）叙述并证明 Borel-Cantelli 引理

证明 作业题 □

题目 6（10 分）设 $f, f_n\in L^1$，$n=1,2,\cdots$ 满足 $f_n\to f$ *a.e.*，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_n|\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^n}|f|\mathrm{d}m$$

证明：对于任何可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n|\mathrm{d}m = \int_E|f|\mathrm{d}m$$

证明 首先在 $E,\mathbb{R}^n\backslash E$ 上对 $|f_k|$ 使用 Fatou 引理有

$$\int_E|f|\mathrm{d}m\le\liminf_{n\to\infty}\int_E|f_n|\mathrm{d}m,\qquad \int_{\mathbb{R}^n\backslash E}|f|\mathrm{d}m\le\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n\backslash E}|f_n|\mathrm{d}m$$

另一方面，由 $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$ 得

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}\int_E|f_n|\mathrm{d}m &= \limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f_n|\mathrm{d}m - \int_{\mathbb{R}^n\backslash E}|f_n|\mathrm{d}m\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_n|\mathrm{d}m - \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n\backslash E}|f_n|\mathrm{d}m \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}|f|\mathrm{d}m - \int_{\mathbb{R}^n\backslash E}|f|\mathrm{d}m = \int_E|f|\mathrm{d}m \end{aligned}$$

所以

$$\int_E|f|\mathrm{d}m\le\liminf_{n\to\infty}\int|f|\mathrm{d}m\le\limsup_{n\to\infty}\int_E|f_n|\mathrm{d}m\le\int_E|f|\mathrm{d}m$$

即得证 □

题目 7（10 分）设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，$m(E)<+\infty$，f 在 E 上非负可测。对于 $\varepsilon>0$，定义

$$E_k(\varepsilon) := \{x\in E: k\varepsilon\le f(x)<(k+1)\varepsilon\},\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$A(\varepsilon) := \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}k\,m(E_k(\varepsilon))$$

证明：

$$\int_E f\mathrm{d}m = \lim_{\varepsilon\to 0}A(\varepsilon)$$

证明 定义

$$\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}k\chi_{E_k(\varepsilon)}(x)$$

注意固定 x 时只属于某一个 E_k，则无穷级数是有限和，故 $\varphi_\varepsilon(x)$ 定义合理；对 $\forall x\in E$，若 $x\in E_k(\varepsilon)$，则

$$\varphi_\varepsilon(x)=k\varepsilon,\quad \varphi_\varepsilon(x)\leq f(x)<\varphi_\varepsilon(x)+\varepsilon$$

因此

$$0\leq\int_E(f-\varphi_\varepsilon)\mathrm{d}m\leq\int_E\varepsilon\mathrm{d}m=\varepsilon m(E)$$

由于 $m(E)<+\infty$，所以当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\varepsilon m(E)\to 0$ 从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_E\varphi_\varepsilon\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m$$

另一方面，由逐项积分定理知

$$\begin{aligned}\int_E\varphi_\varepsilon\mathrm{d}m&=\int_E\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}k\chi_{E_k(\varepsilon)}\mathrm{d}m=\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}k\int_E\chi_{E_k(\varepsilon)}\mathrm{d}m\\&=\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}k\,m(E_k(\varepsilon))=A(\varepsilon)\end{aligned}$$

因此

$$\int_E f\mathrm{d}m=\lim_{\varepsilon\to 0}A(\varepsilon)$$

□